

物理統計学

5 平衡統計力学, 確率過程のどちらか一方を選択せよ.

平衡統計力学

N 個の相互作用しない, 静止した原子 (互いに区別できるとする) からなる体系を考える. 各原子は 2 状態をとり, 各々のエネルギーを $0, \epsilon (> 0)$ とし, 体系のエネルギーを E とする. ボルツマン定数を 1 とし, 以下の問いに答えよ.

- (i) E/N の最大値を求めよ.
- (ii) 体系が温度 T で熱平衡状態にあるとき, $\langle E \rangle / N$ を T の関数として与え, その最大値は 0.5ϵ になることを示せ. ただし $\langle \dots \rangle$ は熱 (カノニカル) 平均を意味する.
- (iii) (ii) と同様の状況のもとで, 体系のエントロピー S が

$$S = -N\{y \ln y + (1-y) \ln(1-y)\},$$

与えられることを示せ. ただし, $y = \exp(-\epsilon/T)/(1 + \exp(-\epsilon/T))$.

確率過程

確率過程 $X(t)$ は a か b の二つの値をとり, 単位時間当たり確率 $\lambda(\mu)$ で a から b (b から a) へ遷移するとする. $p(x, t|y)$ を $X(t=0) = y$ のときに $X(t) = x$ となる条件付き確率を表すとして, 以下の問いに答えよ.

- (i) $p(a, t|y)$ を支配する微分方程式を導け.
- (ii) (i) で導いた微分方程式を解き, $t \rightarrow \infty$ で実現される定常分布 $p_{st}(x) (x = a, b)$ を求めよ.
- (iii) $X(t)$ の期待値 $\langle X(t)|y \rangle$ を $\langle X(t)|y \rangle \equiv \sum_{x=a,b} xp(x, t|y)$ で定義するとき, 定常状態での $X(t)$ の時間相関関数 $\phi(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \langle X(t+s)X(s)|y \rangle$ を $\langle X(t)|x \rangle$ および $p_{st}(x)$ を用いて表せ.
- (iv) $\phi(t)$ を求めよ.