力学系数学

$\boxed{6}$

$I=[a,b]$ を有界閉区間とする $(a<b)$．I における r 回連続的微分可能な関数の全体を $C^r(I)$ で表す．ただし，$r=0,1,2,\cdots$．特に，$r=0$ のときには，$C^0(I)$ を単に $C(I)$ と書く．いま，$u\in C^2(I)$ に対して，

$$L[u]=\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big)+q(x)u$$

で微分作用素 L を定義する．ただし，$q\in C(I)$, $p\in C^1(I)$ かつ $p(x)>0$ $(x\in I)$．ここで，$u,v\in C^2(I)$ に対し

$$\int_a^b\Big(uL[v]-vL[u]\Big)dx \qquad (*)$$

を考える．次の (i) に答えよ．

(i) $(*)$ は u,v,u',v' の境界値 $(x=a,b$ での値$)$ だけに依存することを示せ．

いま，写像 $C^2(I)\to\mathbf{R}^4$ を，$w\in C^2(I)$ に対して

$$w\mapsto\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}w(a)\\w'(a)\\w(b)\\w'(b)\end{pmatrix}$$

で定義すると，この写像は明らかに全射である．このとき，$(*)$ は $\mathbf{R}^4\times\mathbf{R}^4$ の双１次形式 $\omega(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ の形に書ける．以下の (ii), (iii) に答えよ．

(ii) $\omega(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-\omega(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$ を示せ．

(iii) すべての $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^4$ に対して $\omega(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ ならば，$\boldsymbol{v}=0$ となることを示せ．

$x_j,\ j=1,2,3,4,$ を $\mathbf{R}^4$ のデカルト座標とする．$\mathbf{R}^4$ の２次元線形部分空間 E を

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=0,\quad \mu_1x_3+\mu_2x_4=0,\quad (\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0),\quad (\mu_1,\mu_2)\neq(0,0) \qquad (**)$$

で定義する．以下の (iv), (v) に答えよ．

(iv) すべての $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in E$ に対して，$\omega(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ の成り立つことを示せ．

(v) 特に，$p(a)=p(b)$ のとき，$(**)$ 以外に，$\mathbf{R}^4$ の２次元線形部分空間 E' で，すべての $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in E'$ に対し $\omega(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ となるような E' の例を与えよ．