# 基礎数学 I

$\boxed{1}$

$a_k \geq 0,\ k = 0, 1, \cdots, n$ とし, 多項式 $P(z)$ を

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k, \quad z \in \mathbf{C}$$

で定義する. また, $z = x + iy$ により, $\mathbf{C}$ と $\mathbf{R}^2$ とを同一視する. $\mathbf{C}$ 内の半円 $C_1, C_2$ をそれぞれ次のように定義する.

$$C_1 :\ z = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad C_2 :\ z = e^{i\theta},\ \pi \leq \theta \leq 2\pi$$

ただし, $C_1, C_2$ の向きはともに反時計回りとする. $P(z)^2$ に対し, 関数論におけるコーシーの積分定理を用いると, 以下の等式が導かれる.

$$2\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx = -\int_{C_1} P(z)^2 dz + \int_{C_2} P(z)^2 dz$$

また, 区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 $f, g$ に対して, シュワルツの不等式

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \Big(\int_0^1 f(x)^2 dx\Big)^{1/2} \Big(\int_0^1 g(x)^2 dx\Big)^{1/2}$$

の成り立つことは既知とする. 以下の各問に答えよ.

(i) 次の等式を示せ.

$$\int_0^{2\pi} \Big|P(e^{i\theta})\Big|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$$

(ii) 次の不等式を証明せよ.

$$\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx \leq \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$$

(iii) 以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$P(1)^2 - P(0)^2 \leq 2\Big(\int_0^1 P'(x)^2 dx\Big)^{1/2} \Big(\int_0^1 P(x)^2 dx\Big)^{1/2}$$

(iv) $a_0 = 0$ として, 次の不等式を証明せよ.

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^4 \leq 4\pi^2 \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2\Big)$$

(v) $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\Big(\int_0^1 |f(x)|dx\Big)^4 \leq 4\pi^2 \Big(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\Big)\Big(\int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx\Big)$$

# アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

全順序有限集合に対して次の三つの操作をサポートするようなデータ構造 $D$ を考える．

CREATE(H): 空の集合 H を作る（初期化）.

INSERT(H, x): 集合 H に要素 x を挿入する．

DELETEMIN(H): 集合 H が空ではない時，最小の要素（複数個ある場合はその一つ）を削除し，その要素を返す．

任意に与えられた $n$ 個の要素を小さい順に整列することを考える．二要素の大小関係は $O(1)$ 時間で判定できるものとし，以下の問いに答えよ．ただし，アルゴリズムや実装を示すのに C 言語風または Pascal 言語風の疑似コードを用いるとする．

(i) 上記の三つの操作を用いて整列アルゴリズムを設計せよ．

(ii) データ構造 $D$ としてヒープ（heap）を用いたとき，(i) のアルゴリズムが $O(n \log n)$ 時間で実行できるようなヒープの実装を示し，実行時間が $O(n \log n)$ であることを確かめよ．

(iii) 一般に二要素の大小関係を判定することだけで整列を行うようなアルゴリズムは $\Omega(n \log n)$ 時間必要であることを示せ．

# 線形計画

$\boxed{3}$

次の線形計画問題 (P) とその双対問題 (D) を考える．

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b} & \\
& & \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
\text{(D)} & \text{maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} & \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{w} \leq c_j & (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}
$$

ここで，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ は $m$ 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$ は $n$ 次元定数ベクトルであり，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ と $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)^\top$ はそれぞれ $n$ 次元，$m$ 次元変数ベクトルである．また，$^\top$ はベクトルの転置を表す．$\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ と仮定する．
$\boldsymbol{w}^*$ を双対問題 (D) の実行可能解とし，添字集合 $J^* \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ を $J^* = \{j \mid \boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{w}^* = c_j\}$ で定義する．$x_j \, (j \in J^*)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top$ を変数とする次の線形計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}^*) & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in J^*} \boldsymbol{a}_j x_j + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\
& & \quad x_j \geq 0 \quad (j \in J^*) \\
& & \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

以下の問 **(i)–(iv)** に答えよ．

**(i)** 問題 $(\mathrm{P}^*)$ の双対問題を $(\mathrm{D}^*)$ とする．問題 $(\mathrm{D}^*)$ を書け．ただし，変数として $m$ 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ を用いよ．

**(ii)** 問題 $(\mathrm{P}^*)$ と $(\mathrm{D}^*)$ はともに最適解をもつ．その理由を説明せよ．

**(iii)** $x_j^* \, (j \in J^*)$ と $\boldsymbol{y}^* = (0, 0, \ldots, 0)^\top$ は問題 $(\mathrm{P}^*)$ において実行可能であるとする．各 $j \notin J^*$ に対して $x_j^* = 0$ とおき，$x_j^* \, (j = 1, 2, \ldots, n)$ を成分とする $n$ 次元ベクトルを $\boldsymbol{x}^*$ とする．そのとき，$\boldsymbol{x}^*$ は問題 (P) の最適解であり，$\boldsymbol{w}^*$ は問題 (D) の最適解であることを示せ．

**(iv)** 問題 $(\mathrm{P}^*)$ の目的関数の最小値は正であるとし，$\boldsymbol{v}^*$ を問題 $(\mathrm{D}^*)$ の最適解とする．そのとき，すべての $j \notin J^*$ に対して $\boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{v}^* \leq 0$ が成り立つならば，問題 (P) は実行可能解をもたないことを示せ．

# 線形制御理論

$\boxed{4}$

伝達関数

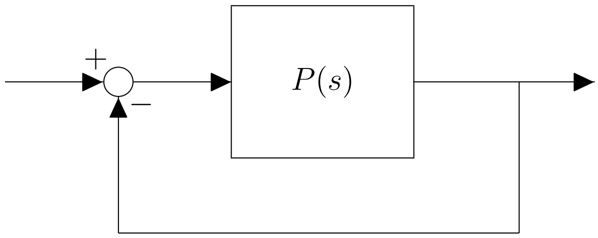
$$P(s) = \frac{c(b-s)}{(s+a)(b+s)}$$

で表されるシステムについて以下の問いに答えよ．ただし $a, b, c$ は実数の定数である．

(i) $a>0, b>0, c>0$ とする．$P(s)$ で表されるシステムに入力 $u(t)=\sin t$ を加えて十分時間が経過すると出力の振幅は $2\sqrt{5}$ に漸近した．また $u(t)=\sin 4t$ を加えて十分時間が経過すると出力の振幅は $\sqrt{5}$ に漸近した．このとき定数 $a, c$ を求めよ．

(ii) $a>0, b>0$ とする．このとき下図のフィードバック系が安定となる定数 $c$ の範囲を求めよ．

(iii) $a=1, c=\sqrt{2}, b>0$ とする．このとき下図のフィードバック系が安定となる定数 $b$ の範囲を求めよ．またその範囲の $b$ について位相余裕を求めよ．



# 基礎力学

## 5

質量 $m$ の質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，$\boldsymbol{r}$ の大きさを $r$ とする．原点を力の中心とする中心力 $\boldsymbol{F} = -cr^{\lambda-2}\boldsymbol{r}$（ただし，$c$，$\lambda$ は定数で $c > 0$）だけが質点に働いている．次の各問いに答えよ．

(i) 力 $\boldsymbol{F}$ は保存力であることを示し，適当な点を基準点としたポテンシャルエネルギーを求めよ．

(ii) 力の中心に関する質点の角運動量が保存されることを証明せよ．そのことを用いて質点は力の中心を含むある平面内を運動することを示せ．

(iii) 質点の運動する平面での極座標を用いた運動方程式を書き下せ．

(iv) $\lambda \neq -2$ のとき，円軌道が存在する．角運動量の大きさを $L$ とするとき，円軌道の半径を求めよ．

(v) $\lambda > -2$，角運動量の大きさ $L$ で質点が円軌道を描いているとき，質点を動径方向に微少に移動させると，質点は動径方向に微小振動を始める．その周期を求めよ．また、円軌道の周期とこの微小振動の周期の比を計算せよ．

# 基礎数学 II

$\boxed{6}$

$n$ を 2 以上のある自然数とし，Vandermonde 行列 $V_n$，および，Hankel 行列 $H_n$ を

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad H_n = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}$$

により導入する．各 $s_k$ は $x_i$ を用いて $s_k = {x_1}^k + {x_2}^k + \cdots + {x_n}^k$, $(k = 0, 1, \dots)$ と表されるとする．ここに，$s_0 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$ である．また，

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) := \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(i) $\det V_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を示せ.

(ii) 相異なる $x_i$ について平面上の $n$ 点 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $\dots$, $(x_n, y_n)$ をとる．曲線

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

がこれら $n$ 点をすべて通るとき，係数 $a_0, a_1 \dots, a_{n-1}$ は，与えられた $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $\dots$, $(x_n, y_n)$ から一意に定まることを示せ.

(iii) $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ のとき，$\det V_n > 0$ が成り立つことを示せ.

(iv) $H_n$ を $V_n$ で表し，$\det H_n = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)^2$ を示せ.

(v) Hankel 行列 $H_{n+1}$ を

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{pmatrix}$$

で定めるとき，$\det H_{n+1} = 0$ が成り立つことを示せ.

# 応用数学

**1**

複素数平面上の関数 $f(z)$ を，領域 $|z| < 2$ で正則な関数とする．また，$\overline{z}$ で，複素数 $z$ の共役複素数を表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $z = x + iy$ において，$z$ の偏微分，$\overline{z}$ の偏微分をそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

と定義する．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ がコーシー・リーマン関係式と同値であることを示せ．

(ii) $z$ の関数 $\overline{f(\overline{z})}$ が正則であることを示せ．

(iii) 複素数 $z$ の実部を $\mathrm{Re}(z)$ であらわし，$|a| \neq 1$ とする．このとき，複素積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{Re}(f(z))}{z-a} dz$$

を求めよ．

# グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を枝に実数の重みをもつ連結無向グラフとする．ここで，$V$ は節点の有限集合，$E$ は枝の有限集合を表し，枝 $e \in E$ の重みを $w(e)$ で表す．また，有限集合 $X$ の要素数を $|X|$ で表す．次の条件 (A) を，$G$ の全域木 $(V,T)$ が最小全域木であることの必要十分条件として用いてよい．

(A) 任意の補木枝 $a \in E-T$ とその基本閉路 $C_T(a) \subseteq T \cup \{a\}$ 上の任意の枝 $b$ に対し，$w(a) \geq w(b)$ が成り立つ．

(i) $G$ の全域木 $(V,T)$ は常に，$|V|-1$ の枝数を持つことを証明せよ．

(ii) 条件 (A) は次の条件 (B) と等価であることを示せ．

(B) 任意の枝 $b \in T$ とその基本カットセット $S_T(b) \subseteq (E-T) \cup \{b\}$ 上の任意の枝 $a$ に対し，$w(a) \geq w(b)$ が成り立つ．

(iii) $G$ の枝の重みがすべて異なるとき，$G$ の最小全域木は唯一に定まることを示せ．

# オペレーションズリサーチ

$\boxed{3}$

以下の問 (i)，(ii) に答えよ．

(i) $f : R^n \to R$ を $f(\mathbf{0}) = 0$ である凸関数とする．以下の (a)，(b) に答えよ．

(a) すべての $t \geq 1$ と $\boldsymbol{x} \in R^n$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(t\boldsymbol{x}) \geq tf(\boldsymbol{x})$$

(b) すべての $\boldsymbol{x} \in R^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) \leq M$ となる定数 $M$ が存在するとき，すべての $\boldsymbol{x} \in R^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = 0$ であることを示せ．

(ii) $\boldsymbol{u}$ を $n$ 次元ベクトル，$\boldsymbol{Q}$ を $n \times n$ 正定値対称行列とする．$\boldsymbol{x} \in R^n$ を決定変数とする次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{(P) :} & \text{minimize} & \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{Q} \boldsymbol{u} \end{array}$$

ここで $\top$ は転置記号を表す．次の (A)，(B) に答えよ．

(A) カルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Khun-Tucker 条件) を用いて，問題 (P) の最適解と目的関数の最小値を求めよ．

(B) 上の結果を用いて，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$(\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u})^2 \leq (\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{Q} \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{u})$$

# 現代制御論

$\boxed{4}$

(i) 次式の状態空間モデルで定義されるシステム $\Sigma$ を考える.

$$\Sigma: \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

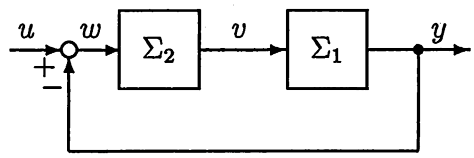
ただし, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ および $y(t) \in \mathbb{R}^p$ は時刻 $t$ における状態, 入力および出力であり, $A$,$B$,$C$ および $D$ は適当な次元の実定数行列である.

以下の問 (a),(b) に答えよ.

(a) システム $\Sigma$ の可制御性の定義を述べよ. また, $\Sigma$ が可制御であるための必要十分条件を一つ書け (証明は不要である).

(b) システム $\Sigma$ の可観測性の定義を述べよ. また, $\Sigma$ が可観測であるための必要十分条件を一つ書け (証明は不要である).

(ii) システム $\Sigma_1$ と $\Sigma_2$ からなる下図のフィードバック系を考える.




システム $\Sigma_1$ と $\Sigma_2$ は, 次式の状態空間モデルで定義されるものとする.

$$\Sigma_1 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + b_1 v(t) \\ y(t) = c_1 x_1(t) + d_1 v(t) \end{cases}, \qquad \Sigma_2 \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + b_2 w(t) \\ v(t) = c_2 x_2(t) \end{cases}$$

ただし, $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, かつ, $u(t)$, $y(t)$, $w(t)$, $v(t) \in \mathbb{R}$ とする. $A_i$, $b_i$, $c_i$ $(i = 1, 2)$ および $d_1$ は適当な次元の実定数の行列, ベクトルまたはスカラーである. また, システム $\Sigma_1$ と $\Sigma_2$ は, ともに可制御かつ可観測であると仮定する.

以下の問 (a),(b),(c) に答えよ. ただし, $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ の可制御性, 可観測性のための必要十分条件を用いる場合, (i) の回答とは別の条件を用いても良い.

(a) $u$ を入力, $y$ を出力とし, $(x_1, x_2)$ を状態として, フィードバック系の状態空間モデルを導出せよ.

(b) ある $\lambda \in \mathbb{C}$ と $(z_1,\, z_2) \neq (0, 0)$ なる $z_1 \in \mathbb{C}^{n_1}$, $z_2 \in \mathbb{C}^{n_2}$ が存在して,

$$z_1^*(A_1 - \lambda I) = 0 \text{ かつ } z_1^* b_1 c_2 + z_2^*(A_2 - \lambda I) = 0 \text{ かつ } z_2^* b_2 = 0$$

が成り立つとする. ただし, $I$ は適当な次元の単位行列であり, $^*$ は複素共役転置を表す. このとき, $z_1^* b_1 \neq 0$ であり, かつ, $A_2 - \lambda I$ は正則である. これらのことを証明せよ.

(c) フィードバック系が可制御であるための必要十分条件を導出せよ. また, その条件を伝達関数を用いて簡潔に説明せよ.

# 物理統計学

$\boxed{5}$

１次元のマルコフ過程 $X(t)$ を考える．$X(t_0) = x_0$ という条件の下で $x < X(t) < x+dx$ となる確率は, $dx$ が十分小さいとき, 遷移確率 $p(x,t|x_0,t_0)(t \geq t_0)$ を用いて, $p(x,t|x_0,t_0)dx$ で与えられる．また遷移確率は次のチャップマン-コルモゴロフ方程式 (1) を満足する．

$$p(x_2,t_2|x_0,t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 p(x_2,t_2|x_1,t_1)p(x_1,t_1|x_0,t_0) \ \ (t_2 > t_1 > t_0) \tag{1}$$

$X(t)$ はさらに時間的に一様な確率過程で, $p(x,t|x_0,t_0) = p(x,t+\tau|x_0,t_0+\tau)$ が任意の $\tau$ について成立するものとする．以下の問いに答えよ．

(i) $W(t)$ はウイーナー過程で, その遷移確率は $\Delta_1 \equiv (t_1 - t_0)$ として

$$p(w_1,t_1|w_0,t_0) = (2\pi\Delta_1)^{-1/2}\exp[-(w_1-w_0)^2/(2\Delta_1)] \tag{2}$$

で与えられるとする．このとき $W(t)$ がマルコフ過程である事を (1) を用いて示せ．必要なら次の公式を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2+bx) = (\pi/a)^{1/2}\exp(b^2/(4a)) \tag{3}$$

(ii) $n$ を正の整数として, $n$ 次のジャンプモーメントを

$$a_n(x_1,dt) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (x_2-x_1)^n p(x_2,t+dt|x_1,t) \tag{4}$$

で定義する．$X(t)$ に対して, 全ての $n$ について

$$A_n(x) = \lim_{dt\to 0} a_n(x,dt)/dt \tag{5}$$

が存在し, かつ $n \geq 3$ に対して $A_n(x) = 0$ とする．このとき $p(x,t|x_0,t_0)$ は次のフォッカープランク方程式 (6) を満足する事を示せ．

$$\partial p(x,t|x_0,t_0)/\partial t = -\partial[A_1(x)p(x,t|x_0,t_0)]/\partial x + (1/2)\partial^2[A_2(x)p(x,t|x_0,t_0)]/\partial x^2 \tag{6}$$

[ヒント：(1) において $t_2 = t_1 + dt$ とし, $F(x,t) = 0$ を証明するのに, 任意の $R(x)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty} dx R(x)F(x,t) = 0$ が成立する事を示すのが見通しのよい一つの方法].

(iii) $W(t)$ は (i) で導入したウイーナー過程であるとする．(ii) の結果に基づき, $p(w,t|w_0,t_0)$ の満たすべきフォッカープランク方程式を導け．

# 力学系数学

$\boxed{6}$

複素数平面 $\mathbf{C}$ から実軸を除いてできる領域を $D$ で表す.

$$D = \mathbf{C} - \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} := \{z = x + iy \in \mathbf{C} |\ y = 0\} \subset \mathbf{C}$$

以下の各問に答えよ.

(i) $a \in D$ と $t \in \mathbf{R}$ とに対して, $\phi_n(t) = \left(1 + \dfrac{t}{n}a\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ とおく. $\phi_n(t)$ のみたす 1 階常微分方程式を求め, それを解くことにより以下を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t}{n}a\right)^n = e^{ta}$$

(ii) $N \times N$ 複素行列 $A$ の固有値はすべて上述の $D$ に含まれるものとする. $A$ と $t \in \mathbf{R}$ とに対して, $\Phi_n(t) = \left(I + \dfrac{t}{n}A\right)^n$ とおく. $\Phi_n(t)$ のみたす 1 階常微分方程式を求め, それを解くことにより以下を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{t}{n}A\right)^n = e^{tA}$$

ただし, $I$ は $N \times N$ 単位行列. また $e^{tA}$ の定義は $e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$ である.