基礎数学 I

1

$a_k \geq 0,\ k = 0, 1, \cdots, n$ とし, 多項式 $P(z)$ を

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k, \quad z \in \mathbf{C}$$

で定義する. また, $z = x + iy$ により, $\mathbf{C}$ と $\mathbf{R}^2$ とを同一視する. $\mathbf{C}$ 内の半円 $C_1,\ C_2$ をそれぞれ次のように定義する.

$$C_1 :\ z = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad C_2 :\ z = e^{i\theta},\ \pi \leq \theta \leq 2\pi$$

ただし, C_1, C_2 の向きはともに反時計回りとする. $P(z)^2$ に対し, 関数論におけるコーシーの積分定理を用いると, 以下の等式が導かれる.

$$2\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx = -\int_{C_1} P(z)^2 dz + \int_{C_2} P(z)^2 dz$$

また, 区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 f, g に対して, シュワルツの不等式

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \Big(\int_0^1 f(x)^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1 g(x)^2 dx\Big)^{1/2}$$

の成り立つことは既知とする. 以下の各問に答えよ.

(i) 次の等式を示せ.

$$\int_0^{2\pi} \Big|P(e^{i\theta})\Big|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$$

(ii) 次の不等式を証明せよ.

$$\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx \leq \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$$

(iii) 以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$P(1)^2 - P(0)^2 \leq 2\Big(\int_0^1 P'(x)^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1 P(x)^2 dx\Big)^{1/2}$$

(iv) $a_0 = 0$ として, 次の不等式を証明せよ.

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^4 \leq 4\pi^2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2\Big)$$

(v) $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\Big(\int_0^1 |f(x)|dx\Big)^4 \leq 4\pi^2\Big(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\Big)\Big(\int_0^1 x^2|f(x)|^2 dx\Big)$$