応用数学

$\boxed{1}$

　複素数平面上の関数 $f(z)$ を，領域 $|z| < 2$ で正則な関数とする．また，$\overline{z}$ で，複素数 z の共役複素数を表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(i)　$z = x + iy$ において，z の偏微分，$\overline{z}$ の偏微分をそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

と定義する．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ がコーシー・リーマン関係式と同値であることを示せ．

(ii)　z の関数 $\overline{f(\overline{z})}$ が正則であることを示せ．

(iii)　複素数 z の実部を $\mathrm{Re}(z)$ であらわし，$|a| \neq 1$ とする．このとき，複素積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{Re}(f(z))}{z-a} dz$$

を求めよ．