現代制御論

4

(i) 次式の状態空間モデルで定義されるシステム Σ を考える.

$$\Sigma:\quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\qquad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

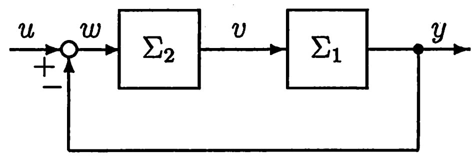
ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ および $y(t) \in \mathbb{R}^p$ は時刻 t における状態，入力および出力であり，A,B,C および D は適当な次元の実定数行列である.

以下の問 (a),(b) に答えよ.

(a) システム Σ の可制御性の定義を述べよ．また，Σ が可制御であるための必要十分条件を一つ書け (証明は不要である).

(b) システム Σ の可観測性の定義を述べよ．また，Σ が可観測であるための必要十分条件を一つ書け (証明は不要である).

(ii) システム Σ_1 と Σ_2 からなる下図のフィードバック系を考える.



システム Σ_1 と Σ_2 は，次式の状態空間モデルで定義されるものとする.

$$\Sigma_1 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + b_1v(t) \\ y(t) = c_1x_1(t) + d_1v(t) \end{cases},\qquad \Sigma_2 \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2x_2(t) + b_2w(t) \\ v(t) = c_2x_2(t) \end{cases}$$

ただし，$x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, かつ，$u(t)$, $y(t)$, $w(t)$, $v(t) \in \mathbb{R}$ とする．A_i, b_i, c_i $(i = 1, 2)$ および d_1 は適当な次元の実定数の行列，ベクトルまたはスカラーである．また，システム Σ_1 と Σ_2 は，ともに可制御かつ可観測であると仮定する.

以下の問 (a),(b),(c) に答えよ．ただし，Σ_1, Σ_2 の可制御性, 可観測性のための必要十分条件を用いる場合，(i) の回答とは別の条件を用いても良い.

(a) u を入力，y を出力とし，(x_1, x_2) を状態として，フィードバック系の状態空間モデルを導出せよ.

(b) ある $\lambda \in \mathbb{C}$ と $(z_1,\, z_2) \neq (0, 0)$ なる $z_1 \in \mathbb{C}^{n_1}$, $z_2 \in \mathbb{C}^{n_2}$ が存在して,

$$z_1^*(A_1 - \lambda I) = 0 \text{ かつ } z_1^*b_1c_2 + z_2^*(A_2 - \lambda I) = 0 \text{ かつ } z_2^*b_2 = 0$$

が成り立つとする．ただし，I は適当な次元の単位行列であり，* は複素共役転置を表す．このとき，$z_1^*b_1 \neq 0$ であり，かつ，$A_2 - \lambda I$ は正則である．これらのことを証明せよ.

(c) フィードバック系が可制御であるための必要十分条件を導出せよ．また，その条件を伝達関数を用いて簡潔に説明せよ.