物理統計学

5

１次元のマルコフ過程 $X(t)$ を考える．$X(t_0) = x_0$ という条件の下で $x < X(t) < x + dx$ となる確率は, dx が十分小さいとき, 遷移確率 $p(x, t|x_0, t_0)(t \geq t_0)$ を用いて, $p(x, t|x_0, t_0)dx$ で与えられる．また遷移確率は次のチャップマン-コルモゴロフ方程式 (1) を満足する．

$$p(x_2, t_2|x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 p(x_2, t_2|x_1, t_1)p(x_1, t_1|x_0, t_0) \ \ (t_2 > t_1 > t_0) \tag{1}$$

$X(t)$ はさらに時間的に一様な確率過程で, $p(x, t|x_0, t_0) = p(x, t + \tau|x_0, t_0 + \tau)$ が任意の τ について成立するものとする．以下の問いに答えよ．

(i) $W(t)$ はウイーナー過程で, その遷移確率は $\Delta_1 \equiv (t_1 - t_0)$ として

$$p(w_1, t_1|w_0, t_0) = (2\pi\Delta_1)^{-1/2} \exp[-(w_1 - w_0)^2/(2\Delta_1)] \tag{2}$$

で与えられるとする．このとき $W(t)$ がマルコフ過程である事を (1) を用いて示せ．必要なら次の公式を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2 + bx) = (\pi/a)^{1/2} \exp(b^2/(4a)) \tag{3}$$

(ii) n を正の整数として, n 次のジャンプモーメントを

$$a_n(x_1, dt) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (x_2 - x_1)^n p(x_2, t + dt|x_1, t) \tag{4}$$

で定義する．$X(t)$ に対して, 全ての n について

$$A_n(x) = \lim_{dt \to 0} a_n(x, dt)/dt \tag{5}$$

が存在し, かつ $n \geq 3$ に対して $A_n(x) = 0$ とする．このとき $p(x, t|x_0, t_0)$ は次のフォッカープランク方程式 (6) を満足する事を示せ．

$$\partial p(x, t|x_0, t_0)/\partial t = -\partial[A_1(x)p(x, t|x_0, t_0)]/\partial x + (1/2)\partial^2[A_2(x)p(x, t|x_0, t_0)]/\partial x^2 \tag{6}$$

[ヒント：(1) において $t_2 = t_1 + dt$ とし, $F(x, t) = 0$ を証明するのに, 任意の $R(x)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty} dx R(x)F(x, t) = 0$ が成立する事を示すのが見通しのよい一つの方法].

(iii) $W(t)$ は (i) で導入したウイーナー過程であるとする．(ii) の結果に基づき, $p(w, t|w_0, t_0)$ の満たすべきフォッカープランク方程式を導け．