# 基礎数学 I

$\boxed{1}$

実数 $c_n$，$n = 0, 1, \ldots,$ に対し，$x = 0$ を中心とするベキ級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

を考える．$0 < R_f < \infty$ なる $R_f$ に対し，$|x| < R_f$ ならばこの級数は絶対収束し，$|x| > R_f$ ならば収束しないとする．同様に，ベキ級数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

は，$0 < R_g < \infty$ なる $R_g$ に対し，$|x| < R_g$ ならばこの級数は絶対収束し，$|x| > R_g$ ならば収束しないとする．以下の問いに答えよ．

(i) $|x| < R_g$ なる任意の $x$ においてベキ級数 $g(x)$ が絶対収束することを用いて

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x|^n < \infty$$

が成り立つことを示せ．

(ii) $0 < R_0 < R_f$ なる任意の正数 $R_0$ に対して，正数 $M_0$ を適当に選べば，任意の $n$ について $|c_n|{R_0}^n \leqq M_0$ とできる．このとき，$|x| < R_0$ なる任意の $x$ において

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n||x|^{n-1} < \infty$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$, $(|a| < 1)$ を用いてよい．

(iii) 上で示したことを用いて，ベキ級数 $f(x)$ と $g(x)$ について

$$R_f = R_g$$

が成り立つことを示せ．

# アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

以下のように 2 次元ベクトル $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ の集合上で全順序 $\preceq$ を定義する．

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff \text{(a) } x_1 + y_1 < x_2 + y_2 \text{ または (b) } x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \text{ かつ } x_1 \leqq x_2$$

任意に与えられる $n$ 個の 2 次元ベクトルからなる有限多重集合 $A$ の全要素を $\preceq$ に従って，小さいものから大きいものへの順に整列させることを考える．ただし，同じ $x$, $y$ 成分を持つ二つのベクトルの順序は任意である．ヒープソートに関して以下の問いに答えよ．入力として，$A$ の $n$ 個のベクトルは，1 次元配列 `v` に格納されている．また，$A$ の各要素 `v[i]` (`i` がインデックス) の $x$ 成分と $y$ 成分をそれぞれ `v[i].x` と `v[i].y` と書く．

(i) (ソートのための) ヒープの特徴と基本操作を述べよ．

(ii) (i) のヒープの実現方法を C または Pascal 言語の擬似コードを用いて示せ．その際，高々$O(n)$ の追加領域を用いてよい．

(iii) (i) のヒープを用いたヒープソートの擬似コードを示せ．

(iv) 四則演算や比較，値の代入が $O(1)$ 時間でできるとし，ヒープソートが $O(n \log n)$ の計算時間で実現できることを示せ．

# 線形計画

$\boxed{3}$

以下の **(i)**, **(ii)** に答えよ．ただし，$\boldsymbol{a}^T$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の転置を表す (行列の転置も同様).

**(i)**　次の線形計画問題を考える．

$$\mathrm{P}: \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ここで，$\boldsymbol{A}$ は $n \times m$ 定数行列，$\boldsymbol{b}$ は $m$ 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は $n$ 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は $n$ 次元変数ベクトルである．問題 P の双対問題の任意の最適解を $\boldsymbol{w}^*$ とする．次に，問題 P の等式制約条件の右辺のベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\hat{\boldsymbol{b}}$ で置き換えた線形計画問題を $\hat{\mathrm{P}}$ とし，その双対問題の任意の最適解を $\hat{\boldsymbol{w}}^*$ とする．不等式

$$(\boldsymbol{b} - \hat{\boldsymbol{b}})^T(\boldsymbol{w}^* - \hat{\boldsymbol{w}}^*) \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．なお，いずれの場合も，双対問題は最適解をもつとする．

**(ii)**　パラメータ $\boldsymbol{y}$ を含む次の線形計画問題を考える．

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{y}): \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ここで，$\boldsymbol{A}$ は $n \times m$ 定数行列，$\boldsymbol{0}$ は $m$ 次元ゼロベクトル，$\boldsymbol{B}$ は $n \times l$ 定数行列，$\boldsymbol{c}$ は $n$ 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{y}$ は $l$ 次元パラメータベクトル，$\boldsymbol{x}$ は $n$ 次元変数ベクトルである．この問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ の目的関数の最小値をパラメータ $\boldsymbol{y}$ の関数とみなして $f(\boldsymbol{y})$ と書く．ただし，問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ が有界でないときは $f(\boldsymbol{y}) = -\infty$ とする．次に，関数 $f(\boldsymbol{y})$ を非負象限上で最大化する問題

$$\mathrm{Q}: \quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & f(\boldsymbol{y}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

を考える．この問題 Q の目的関数の最大値が 0 となるための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{c}$$

を満たす非負実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_l$ が存在することである．このことを示せ．ただし，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の列ベクトル，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ は行列 $\boldsymbol{B}$ の列ベクトルを表す．

# 線形制御理論

$\boxed{4}$

下図のブロック線図において，$y$, $u$, $d$, $r$ および $e$ は，それぞれプラント出力，制御入力，外乱，目標値および制御偏差を表わす．$P(s)$ はプラントの伝達関数である．また，$a$, $b$ は設計すべき制御器の実数値パラメータであり，$(a, b) \neq (0, 0)$ とする．以下では，

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 4s - 1}$$

として，問 (i)–(v) に答えよ．

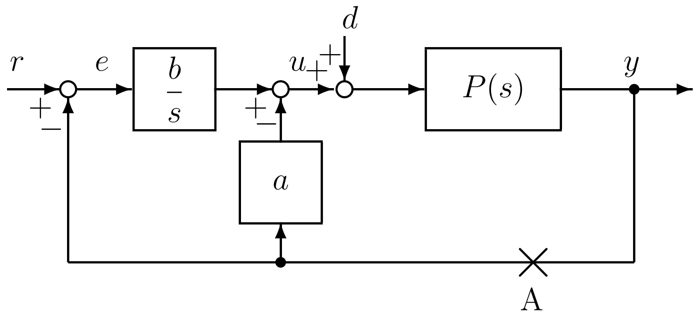
(i) このフィードバック制御系の内部安定性の定義を書け．

(ii) 図中の点A（×印）でフィードバックループを切断したときの一巡伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

(iii) $G(s)$ の中で極零相殺がおこるような $(a, b)$ の値はあるか？あるならば，それらに対して，フィードバック制御系は内部安定か？その理由も簡潔に述べよ．ただし，(iv) の結果を用いてはならない．

(iv) このフィードバック制御系を内部安定にするパラメータ $a$, $b$ の値の範囲を求めよ．

(v) このフィードバック制御系を内部安定とし，かつ，プラント $P(s)$ のゲイン変動に対してゲイン余裕を 20[dB] 以上とするための必要十分条件を設計パラメータ $a$ と $b$ を用いて表せ．



# 基礎力学

$\boxed{5}$

質量 $m$ の質点が $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2a}$ で表される滑らかな回転放物面上を運動する．($a(> 0)$ は定数，$x$，$y$，$z$ は３次元デカルト直交座標の各座標）質点は回転放物面から離れないものとする．鉛直上向きを $z$ 軸の正の方向とし，重力加速度の大きさを $g$ とする．時刻 $t = 0$ に質点は $z = z_0(> 0)$，$y = 0$，$x = \overline{2az_0}$ の回転放物面上にあり，回転放物面にそって水平方向（$y$ 軸の正の向き）に速さ $v_0$ で動き始めるとする．

(i) 原点に関する角運動量の $z$ 成分が保存されることを説明し，その保存則を円筒座標 $(\rho, \varphi, z)$ を用いて，$\varphi \left(= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ と $z$ で表せ．($x = \rho\cos\varphi$，$y = \rho\sin\varphi$)

(ii) 力学的全エネルギーが保存されることを説明し，その保存則を $\varphi$，$z \left(= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$，$z$ で表せ．

(iii) (i) と (ii) の結果を用いて，$z = z_0$ 以外で，質点の速度が水平方向となる $z$ の値を求めよ．

# 基礎数学 II

$\boxed{6}$

3 次実正方行列 $X$ と実パラメータ $\lambda$ とに対して,

$$\det(\lambda I_3 \quad X) = \lambda^3 \quad \lambda^2\phi_1(X) + \lambda\phi_2(X) \quad \phi_3(X)$$

とおいて, 関数 $\phi_j(X)$, $j = 1, 2, 3$ を定める. ただし, det は正方行列の行列式を表し, $I_3$ は 3 次単位行列である. 以下の問いに答えよ.

(i) 次の等式を示せ.

$$\phi_1(X) = \mathrm{tr}(X), \quad \phi_2(X) = \sum_{k=1}^{3} \det(X^{(kk)}), \quad \phi_3(X) = \det X$$

ただし, tr は正方行列のトレースを, $X^{(ij)}$ は行列 $X$ から $i$ 行と $j$ 列を取り除いてできる 2 次正方行列をそれぞれ表す.

(ii) 3 次実正方行列 $A$ を列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \quad \mathbf{R}^3$ を用いて, $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ のように表す. このとき, $X = A^T A$ に対し, $\phi_j(A^T A)$, $j = 1, 2, 3$ をベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の内積, 外積, ノルム等を用いて書き表せ. ただし, $A^T$ は $A$ の転置行列を表す. また, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \quad \mathbf{R}^3$ の内積, 外積をそれぞれ $\boldsymbol{x} \ \ \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y}$ で表し, $\boldsymbol{x}$ のノルムを $\ \boldsymbol{x} \ = \ \overline{\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{x}}$ と記す.

(iii) (ii) の $A$ に対し, 以下の不等式を証明せよ.

$$\det A \leqq \ \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}$$

また, 等号が成り立つのはどのような場合か.

# 応用数学

$\boxed{1}$

数列 $c = \quad c_n \ {}_{n=-\infty}^{\infty}$ に周期 $T\,(>0)$ の周期関数を対応させる写像を

$$(\mathcal{F}^* c)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \quad nt} \quad (t \quad \mathbb{R})$$

$$\omega = 2\pi/T$$

で定義する. また, $f, g$ を周期 $T$ の周期関数とし, $f$ と $g$ のたたみこみ $f \quad g$ を

$$f \quad g\,(t) = \int_0^T f(s)\,g(t \quad s)ds \quad (t \quad \mathbb{R})$$

で定義する. 区間 $[\quad 1, 1]$ に台をもつ有界な関数 $G_1$, $G_2$ をそれぞれ

$$G_1(s) = \begin{cases} 1 & s \quad [\quad 1,1] \\ 0 & s \ / \ [\quad 1,1] \end{cases}, \qquad G_2(s) = \begin{cases} 1 \quad s & s \quad [\quad 1,1] \\ 0 & s \ / \ [\quad 1,1] \end{cases}$$

とし, 数列 $a_1, a_2$ をそれぞれ $a_1 = \quad G_1(n/N) \ {}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_2 = \quad G_2(n/N) \ {}_{n=-\infty}^{\infty}$ で定義する. ただし, $N = 1, 2, 3, \quad$ である. $a_1$, $a_2$ に対応する周期関数 $\mathcal{F}^* a_1, \mathcal{F}^* a_2$ の $1/T$ 倍をそれぞれ

$$D_N(t) = \frac{1}{T}\,(\mathcal{F}^*\,a_1)\,(t), \qquad F_N(t) = \frac{1}{T}\,(\mathcal{F}^*\,a_2)\,(t)$$

とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) $\displaystyle\int_0^T F_N(t)dt = 1$ が成り立つことを示せ.

(ii) $D_N(t)$ を求めよ.

(iii) 一般に, 関数 $g_N(t)$ を周期 $T$ の連続な周期関数とし, 以下の条件をみたすものとする.

a) 任意の $N = 1, 2, 3, \quad$ について $\displaystyle\int_0^T g_N(t)dt = 1$ かつ, ある定数 $M$ が存在して, $\displaystyle\int_0^T \quad g_N(t) \quad dt \leqq M$.

b) $0 < \delta < T/2$ なる任意の $\delta$ に対して, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int^{T-} \quad g_N(t) \quad dt = 0$.

いま $f(t)$ が周期 $T$ の連続な周期関数ならば, $N \quad$ のとき $g_N \quad f(t)$ は $f(t)$ に一様収束することを示せ.

(iv) $F_N(t) = \dfrac{1}{TN} \quad \dfrac{\sin(\omega N t/2)}{\sin(\omega t/2)} \quad {}^2$ が成り立つことを示せ.

(v) 上の結果を利用して, $F_N(t)$ が (iii) にいう条件 a), b) をみたすことを示せ.

# グラフ理論

$\boxed{2}$

有限有向グラフ $H$ の節点集合，枝集合をそれぞれ $V(H)$, $E(H)$ で表す．以下では，節点および枝に非負実数の重みが与えられた有限完全有向グラフ $G$ を考える．節点 $v \in V(G)$ の重みを $\alpha(v)$ で表し，枝 $e \in E(G)$ の重みを $\alpha(e)$ で表す．始点 $u$，終点 $v$ を持つ枝 $e$ は $(u, v)$ と表し，この枝の重み $\alpha(e)$ は $\alpha(u, v)$ とも書く．$G$ の有向パス $P$ の長さ $\alpha(P)$ を $\sum_{v \in V(P)} \alpha(v) + \sum_{e \in E(P)} \alpha(e)$ と定め，ある節点 $s \in V(G)$ を始点とするとき，$s$ から節点 $v \in V(G)$ への最短有向パスの長さを $\mathrm{dist}(v)$ と書く．とくに，$\mathrm{dist}(s) = \alpha(s)$ である．以下の問いに答えよ．

(i) $\alpha(v) = 0, \forall v \in V(G)$，$\alpha(e) \geqq 0, \forall e \in E(G)$ であるとき，$s$ から他のすべての節点への最短パスを求める多項式時間アルゴリズムを与えよ．アルゴリズムが正しく答えを求めること，および多項式時間で計算が終了することについても証明を与えよ．

(ii) $\alpha(v) \geqq 0, \forall v \in V(G)$，$\alpha(e) \geqq 0, \forall e \in E(G)$ であるとき，$s$ から他のすべての節点への最短パスを求める多項式時間アルゴリズムを与えよ．アルゴリズムが正しく答えを求めること，および多項式時間で計算が終了することについても証明を与えよ．

# オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

次の凸計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}: \quad & \text{minimize} \quad & & -\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i + c_i) \\
& \text{subject to} & & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
& & & x_i \geqq 0 \ \ (i = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

ただし，$c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ は正の定数，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ は決定変数である．$^T$ は転置を表し，ln は自然対数を表す．

さらに，問題 P に関連して，$\lambda > 0$ をパラメータとして含む次の凸計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\lambda): \quad & \text{minimize} \quad & & -\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i + c_i) + \lambda \left( \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right) \\
& \text{subject to} & & x_i \geqq 0 \ \ (i = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

以下の問 (i)-(v) に答えよ．

(i) 問題 P($\lambda$) のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を書け．

(ii) 問題 P($\lambda$) の最適解を $\boldsymbol{x}(\lambda) = (x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_n(\lambda))^T$ とする．このとき，

$$
x_i(\lambda) = \max\left\{0, \frac{1}{\lambda} - c_i\right\} \quad (i = 1, \ldots, n)
$$

となることを示せ．

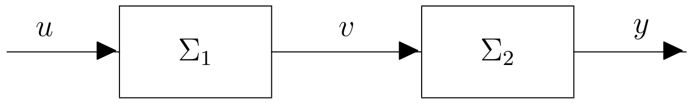
(iii) 問題 P と問題 P($\lambda$) の目的関数の最小値をそれぞれ min(P)，min(P($\lambda$)) と書く．このとき，任意の $\lambda > 0$ に対して min(P) $\geqq$ min(P($\lambda$)) が成り立つことを示せ．

(iv) $\boldsymbol{x}(\lambda)$ が問題 P の最適解であるための必要十分条件は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(\lambda) = 1$ であることを示せ．

(v) $n = 3,\ c_1 = 0.3, c_2 = 0.7, c_3 = 2$ とする．問題 P の最適解を求めよ．

# 現代制御論

## 4




図のように直列接続された制御系を考える．システム $\Sigma_1, \Sigma_2$ はそれぞれスカラー実数を状態にもつ線形状態方程式

$$\Sigma_1 \ : \ \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + u \\ v = x_1 \end{cases} \qquad \Sigma_2 \ : \ \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = ax_2 + v \\ y = cx_2 + v \end{cases}$$

で記述されるものとする．ただし $a, c$ は実数のパラメータである．また直列接続されたシステムを $\Sigma$ とよぶ．このとき以下の問いに答えよ．

(i) 状態ベクトルを $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ として，システム $\Sigma$ の状態方程式を求めよ．

(ii) システム $\Sigma$ が可制御となるようなパラメータ $a, c$ の値があれば，それらをすべて求めよ．

(iii) システム $\Sigma$ が可観測となるようなパラメータ $a, c$ の値があれば，それらをすべて求めよ．

(iv) システム $\Sigma$ について，$a = 0, c = 1$ とする．$t \geqq 0$ において $u(t) = 0$ とする．このとき任意の $t \geqq 0$ について $y(t) = 0$ となる初期状態 $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$ があれば，それらをすべて求めよ．

# 物理統計学

$\boxed{5}$

次のランジェバン方程式で記述されるオルンシュタイン ウーレンベック過程 $v(t)$ を考える.

$$\frac{dv(t)}{dt} = \quad \gamma v(t) + f(t) \tag{1}$$

ここに $\gamma(>0)$ は摩擦係数を表し, ノイズ $f(t)$ は平均０の白色ガウス過程であり, その時間相関関数はディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ を用いて次で与えられる.

$$f(t)f(t') \ = 2\gamma T\delta(t \quad t') \tag{2}$$

但し $T(>0)$ はノイズの強さを表す定数である. 平衡状態での $v(t)$ の時間相関関数 $\phi(t)$ を, 以下の問いに従い２通りの方法で求めよう. $\phi(t)$ は偶関数であるが, 簡単のため以下では, $\phi(t)(t>0)$ の場合について議論する.

(i) $v(t\ v_0)$ を $v(t=0)=v_0$ を満足する (1) 式の解（積分）とする. 第１の方法として, 次の公式を用いて $\phi(t)$ を求めよ.

$$\phi(t) = \lim_{t'\to\infty} \ v(t+t'\ v_0)v(t'\ v_0) \tag{3}$$

第２の方法として, $\phi(t)$ は以下に示すように, 一旦フォッカー プランク方程式を経由しても求めることができる.

(ii) $p(v,t)$ を $v(t)$ の分布関数とするとき, $p(v,t)$ の時間発展を記述するフォッカー プランク方程式を導き, その平衡分布 $p_{eq}(v)$ を求めよ.

(iii) $v(t=0)=v_0$ のとき, $v(t)=v$ となる (遷移) 確率 $p(v,t\ v_0)(t>0)$ をフォッカー プランク方程式から求め, 次の公式を用いて $\phi(t)$ を求めよ.

$$\phi(t) = \int dv_0\ v_0 p_{eq}(v_0) \int dv\ vp(v,t\ v_0) \tag{4}$$

# 力学系数学

6

$\mathbf{R}^{2n}$ の座標を $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = (q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \boldsymbol{x}^T$ と書く．ただし，ベクトルまたは行列 $A$ の転置を $A^T$ と書く．関数 $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = F(\boldsymbol{x})$ が与えられたとき，$(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ に対する微分方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

を，$F$ が生成するハミルトン方程式と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(i) $2n$ 次の実対称行列 $A = (A_{jk})$ を用いて関数 $F_A(\boldsymbol{x})$ が

$$F_A(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2n} x_j \, A_{jk} \, x_k \tag{2}$$

と与えられるならば，$F_A$ が生成するハミルトン方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = JA\boldsymbol{x}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

と書けることを示せ．ここで $J$ は $2n$ 次正方行列であり，その中の $I_n$ は $n$ 次単位行列，$0_n$ は $n$ 次零行列である．

(ii) $2n$ 次の実対称行列 $B = (B_{jk})$ を用いて関数 $F_B(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x}$ を与える．$\boldsymbol{x}(t)$ はハミルトン方程式 (3) をみたすとする．$F_B(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{x}(t)$ を代入したとき，任意の初期条件 $\boldsymbol{x}(0)$ に対して $F_B(\boldsymbol{x}(t))$ が $t$ に依らないための必要十分条件は

$$AJB - BJA = 0_{2n} \tag{4}$$

であることを証明せよ．

(iii) $A = I_{2n}$ とする．また，$n$ 次正方行列 $a, b, c$ を用いて

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b^T & c \end{pmatrix}, \qquad a^T = a, \qquad c^T = c$$

とおく．このとき，$B$ が式 (4) をみたすための必要十分条件は

$$a = c, \qquad b^T = -b$$

であることを証明せよ．

(iv) とくに $n = 2$ とし，$B$ を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．$F_B$ が生成するハミルトン方程式を解いて，$(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ を $(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{p}(0))$ と $t$ で表せ．また，$(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ が $t$ の周期関数であることを示し，その周期を求めよ．

# 確率・統計論

$\boxed{7}$

$X$ を平均 0 で分散が 1 の実数値確率変数とする．すなわち

$$E[X] = 0, \quad E[X^2] = 1$$

である．ただしここで, 確率変数 $f(X)$ $(f : \mathbf{R} \to \mathbf{R})$ の期待値を $E[f(X)]$ で表している．このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を連続で有界な関数とする．このとき

$$(E[f(X)g(X)])^2 \leqq E[f(X)^2]E[g(X)^2]$$

が成り立つことを示せ.

(ii) $k > 0$ に対して

$$P(|X| \geqq k) \leqq \frac{1}{k^2}$$

が成り立つことを示せ.

(iii) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を 2 階連続微分可能な凸関数とする．このとき

$$E[h(X)] \geqq h(0)$$

が成り立つことを示せ.

（ヒント：Taylor の公式より, 各 $x \in \mathbf{R}$ に対してある $0 < \epsilon < 1$ が存在して

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{1}{2}h''(\epsilon x)x^2$$

が成り立つことを用いよ.）

(iv) 特に, $X$ を平均 0, 分散 1 の標準正規分布に従う確率変数とする．すなわち

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} dx$$

を $-\infty < a \leqq b < \infty$ に対して満たすものとする．このとき $X$ のモーメント母関数 $M(t) := E[\mathrm{e}^{tX}]$ $(t \in \mathbf{R})$ を求めよ．また, モーメント母関数を用いて期待値 $E[X^3]$, $E[X^4]$ を求めよ.