

## 基礎数学 II

6

3 次実正方行列  $X$  と実パラメータ  $\lambda$  とに対して,

$$\det(\lambda I_3 - X) = \lambda^3 - \lambda^2 \phi_1(X) + \lambda \phi_2(X) - \phi_3(X)$$

とにおいて, 関数  $\phi_j(X)$ ,  $j = 1, 2, 3$  を定める. ただし,  $\det$  は正方行列の行列式を表し,  $I_3$  は 3 次単位行列である. 以下の問いに答えよ.

(i) 次の等式を示せ.

$$\phi_1(X) = \operatorname{tr}(X), \quad \phi_2(X) = \sum_{k=1}^3 \det(X^{(kk)}), \quad \phi_3(X) = \det X$$

ただし,  $\operatorname{tr}$  は正方行列のトレースを,  $X^{(ij)}$  は行列  $X$  から  $i$  行と  $j$  列を取り除いてできる 2 次正方行列をそれぞれ表す.

(ii) 3 次実正方行列  $A$  を列ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  を用いて,  $A = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  のように表す. このとき,  $X = A^T A$  に対し,  $\phi_j(A^T A)$ ,  $j = 1, 2, 3$  をベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の内積, 外積, ノルム等を用いて書き表せ. ただし,  $A^T$  は  $A$  の転置行列を表す. また,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  の内積, 外積をそれぞれ  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  で表し,  $\mathbf{x}$  のノルムを  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$  と記す.

(iii) (ii) の  $A$  に対し, 以下の不等式を証明せよ.

$$|\det A| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\|$$

また, 等号が成り立つのはどのような場合か.