グラフ理論

$\boxed{2}$

有限有向グラフ H の節点集合，枝集合をそれぞれ $V(H)$, $E(H)$ で表す．以下では，節点および枝に非負実数の重みが与えられた有限完全有向グラフ G を考える．節点 $v \in V(G)$ の重みを $\alpha(v)$ で表し，枝 $e \in E(G)$ の重みを $\alpha(e)$ で表す．始点 u，終点 v を持つ枝 e は (u, v) と表し，この枝の重み $\alpha(e)$ は $\alpha(u, v)$ とも書く．G の有向パス P の長さ $\alpha(P)$ を $\sum_{v \in V(P)} \alpha(v) + \sum_{e \in E(P)} \alpha(e)$ と定め，ある節点 $s \in V(G)$ を始点とするとき，s から節点 $v \in V(G)$ への最短有向パスの長さを $\mathrm{dist}(v)$ と書く．とくに，$\mathrm{dist}(s) = \alpha(s)$ である．以下の問いに答えよ．

(i) $\alpha(v) = 0, \forall v \in V(G)$，$\alpha(e) \geqq 0, \forall e \in E(G)$ であるとき，s から他のすべての節点への最短パスを求める多項式時間アルゴリズムを与えよ．アルゴリズムが正しく答えを求めること，および多項式時間で計算が終了することについても証明を与えよ．

(ii) $\alpha(v) \geqq 0, \forall v \in V(G)$，$\alpha(e) \geqq 0, \forall e \in E(G)$ であるとき，s から他のすべての節点への最短パスを求める多項式時間アルゴリズムを与えよ．アルゴリズムが正しく答えを求めること，および多項式時間で計算が終了することについても証明を与えよ．