物理統計学

$\boxed{5}$

次のランジェバン方程式で記述されるオルンシュタイン–ウーレンベック過程 $v(t)$ を考える.

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) + f(t) \tag{1}$$

ここに $\gamma(>0)$ は摩擦係数を表し, ノイズ $f(t)$ は平均 0 の白色ガウス過程であり, その時間相関関数はディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ を用いて次で与えられる.

$$\langle f(t)f(t')\rangle = 2\gamma T\delta(t-t') \tag{2}$$

但し $T(>0)$ はノイズの強さを表す定数である. 平衡状態での $v(t)$ の時間相関関数 $\phi(t)$ を, 以下の問いに従い 2 通りの方法で求めよう. $\phi(t)$ は偶関数であるが, 簡単のため以下では, $\phi(t)(t>0)$ の場合について議論する.

(i) $v(t|v_0)$ を $v(t=0)=v_0$ を満足する (1) 式の解（積分）とする. 第 1 の方法として, 次の公式を用いて $\phi(t)$ を求めよ.

$$\phi(t) = \lim_{t'\to\infty}\langle v(t+t'|v_0)v(t'|v_0)\rangle \tag{3}$$

第 2 の方法として, $\phi(t)$ は以下に示すように, 一旦フォッカー–プランク方程式を経由しても求めることができる.

(ii) $p(v,t)$ を $v(t)$ の分布関数とするとき, $p(v,t)$ の時間発展を記述するフォッカー–プランク方程式を導き, その平衡分布 $p_{eq}(v)$ を求めよ.

(iii) $v(t=0)=v_0$ のとき, $v(t)=v$ となる (遷移) 確率 $p(v,t|v_0)(t>0)$ をフォッカー–プランク方程式から求め, 次の公式を用いて $\phi(t)$ を求めよ.

$$\phi(t) = \int dv_0\ v_0 p_{eq}(v_0)\int dv\ vp(v,t|v_0) \tag{4}$$