力学系数学

6

$\mathbf{R}^{2n}$ の座標を $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = (q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \boldsymbol{x}^T$ と書く．ただし，ベクトルまたは行列 A の転置を A^T と書く．関数 $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = F(\boldsymbol{x})$ が与えられたとき，$(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ に対する微分方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

を，F が生成するハミルトン方程式と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(i) $2n$ 次の実対称行列 $A = (A_{jk})$ を用いて関数 $F_A(\boldsymbol{x})$ が

$$F_A(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2n} x_j\, A_{jk}\, x_k \tag{2}$$

と与えられるならば，F_A が生成するハミルトン方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = JA\boldsymbol{x}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

と書けることを示せ．ここで J は $2n$ 次正方行列であり，その中の I_n は n 次単位行列，0_n は n 次零行列である．

(ii) $2n$ 次の実対称行列 $B = (B_{jk})$ を用いて関数 $F_B(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x}$ を与える．$\boldsymbol{x}(t)$ はハミルトン方程式 (3) をみたすとする．$F_B(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{x}(t)$ を代入したとき，任意の初期条件 $\boldsymbol{x}(0)$ に対して $F_B(\boldsymbol{x}(t))$ が t に依らないための必要十分条件は

$$AJB - BJA = 0_{2n} \tag{4}$$

であることを証明せよ．

(iii) $A = I_{2n}$ とする．また，n 次正方行列 a, b, c を用いて

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b^T & c \end{pmatrix}, \qquad a^T = a, \qquad c^T = c$$

とおく．このとき，B が式 (4) をみたすための必要十分条件は

$$a = c, \qquad b^T = -b$$

であることを証明せよ．

(iv) とくに $n = 2$ とし，B を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．F_B が生成するハミルトン方程式を解いて，$(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ を $(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{p}(0))$ と t で表せ．また，$(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ が t の周期関数であることを示し，その周期を求めよ．