基礎数学 I

$\boxed{1}$

実数列 a_j $(j = 1, 2, \dots)$ と漸化式

$$\begin{cases} p_0(x) = 1, \\ p_1(x) = x - a_1, \\ p_k(x) = (x - a_k)p_{k-1}(x) - p_{k-2}(x), \quad (k = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

によって実変数 x の多項式の列 $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ を定める．以下の問いに答えよ.

(i) 任意の x において $p_k(x)$ と $p_{k-1}(x)$ が同時に 0 となることはないことを示せ.

(ii) $x = \lambda$ を k 次多項式 $p_k(x)$ の実の零点とするとき，

$$p_{k+1}(\lambda)p_{k-1}(\lambda) < 0, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立つことを示せ.

(iii) 多項式 $p_k(x)$ の導関数を $p'_k(x)$ とかく.

$$q_k(x) = p'_k(x)p_{k-1}(x) - p_k(x)p'_{k-1}(x), \quad (k = 1, 2, \dots)$$

とおくとき，任意の x において $q_k(x) \geqq q_{k-1}(x)$，および，$q_k(x) \geqq 1$ が成り立つことを示せ.

(iv) 多項式 $p_k(x)$ の実の零点は単根であることを示せ.

(v) 多項式 $p_k(x)$ の実の零点 $\lambda_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \dots, \ell)$ が $\lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k)} < \cdots < \lambda_\ell^{(k)}$ をみたし，多項式 $p_{k+1}(x)$ の実の零点 $\lambda_j^{(k+1)}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ が $\lambda_1^{(k+1)} < \lambda_2^{(k+1)} < \cdots < \lambda_m^{(k+1)}$ をみたすとする．このとき，$\ell = k$，$m = k + 1$ で

$$\lambda_1^{(k+1)} < \lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k+1)} < \lambda_2^{(k)} < \cdots < \lambda_k^{(k+1)} < \lambda_k^{(k)} < \lambda_{k+1}^{(k+1)}$$

が成り立つことを示せ.

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

整列アルゴリズムについて以下の問いに答えよ．

(i) 4つのキーを5回以下の比較で整列できるアルゴリズムを与えよ．また，5回未満の比較で済むアルゴリズムが存在しないことを証明せよ．

(ii) n 個のキーを最悪の場合でも $O(n \log n)$ 時間で整列できるアルゴリズムを一つ示せ．計算時間が $O(n \log n)$ になっている理由も述べよ．

線形計画

$\boxed{3}$

次の線形計画問題 P を考える.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: \quad & \text{minimize} && \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} && \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b} \\ & && \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ここで, $\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 定数行列, $\boldsymbol{b}$ は m 次元定数ベクトル, $\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル, $\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルであり, $^\top$ は転置記号を表す. さらに, 問題 P に関連して, 非負のパラメータ $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_m)^\top \geqq \boldsymbol{0}$ を含む次の線形計画問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{w})$ を考える.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\boldsymbol{w}): \quad & \text{minimize} && \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} && \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{b} \\ & && \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

問題 P および 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{w})$ は常に最適解をもつと仮定し, それらの問題の目的関数の最小値をそれぞれ f^* および $f(\boldsymbol{w})$ と表す.

以下の問 **(i)** – **(iii)** に答えよ.

(i) 任意の $\boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{0}$ に対して $f(\boldsymbol{w}) \leqq f^*$ が成り立つことを示せ.

(ii) $f(\boldsymbol{w}) = f^*$ となるような $\boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{0}$ が存在することを示せ.

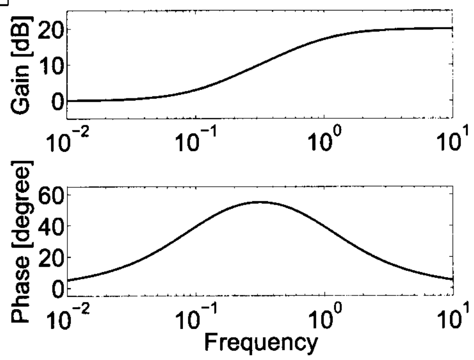
(iii) $\beta \leqq f^*$ であるような任意の実数 β に対して

$$S_\beta = \{\, \boldsymbol{w} \in I\!R^m \mid f(\boldsymbol{w}) \geqq \beta,\ \boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{0} \,\}$$

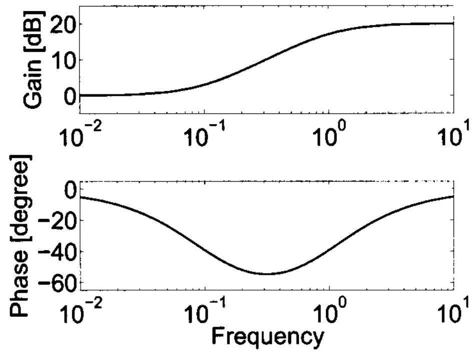
で定義される集合 S_β は空でない凸集合であることを示せ.

線形制御理論

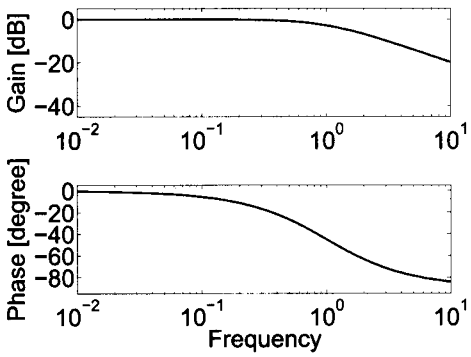
4



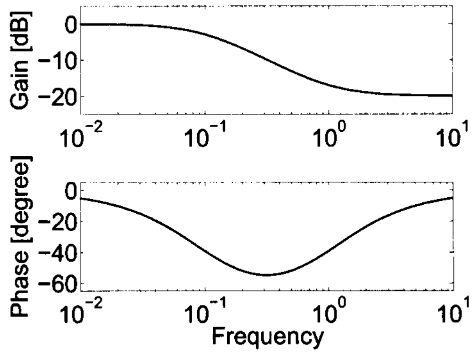
ボーデ線図 (a)



ボーデ線図 (b)



ボーデ線図 (c)



ボーデ線図 (d)

以下の問いに答えよ．

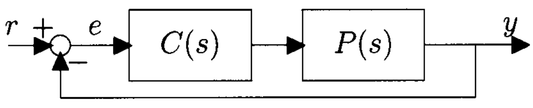
(i) 以下の伝達関数 $G_1(s)$, $G_2(s)$ を表すボーデ線図は，それぞれ上記 (a)–(d) のどれになるかについて，理由を述べて答えよ．

$$G_1(s) = \frac{10s+1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{s+1}{10s+1}.$$

(ii) 下図のフィードバック系を考える．ここで

$$P(s) = \frac{2}{s+1}$$

とする．$C(s) = 1$ のときのゲイン交叉角周波数，ならびに r に単位階段関数を与えるときの定常位置偏差を求めよ．次に，$C(s)$ として位相遅れ補償器を用いて，ゲイン交叉角周波数が 1.8 以下であり，定常位置偏差を 0.1 以下になるようにしたい．それらを満たす位相遅れ補償器を一つ求めよ．



フィードバック系

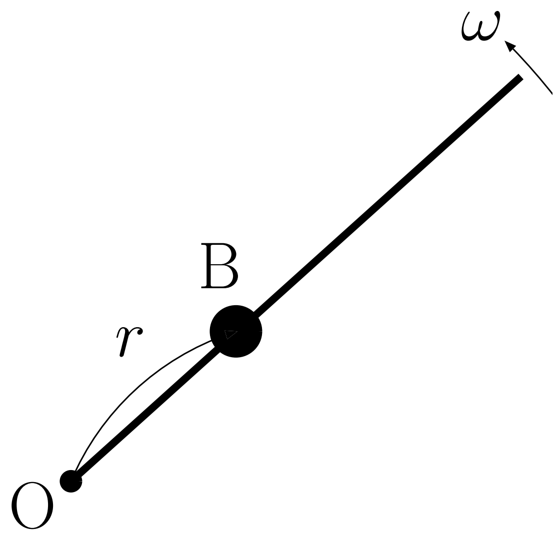
基礎力学

5

図に示すように，細い棒が点 O を中心に水平面内を一定の角速度 ω で回転し，質量 m の物体 B は棒にそって運動する．棒は十分長く，物体 B に摩擦力ははたらかないものとして，以下の設問に答えよ．

(i) B は，時刻 $t=0$ に点 O から距離 a の位置にあり，棒方向の速度は 0 であったとする．その後の時刻 $t(>0)$ での物体 B の点 O からの距離 r を求めよ．

(ii) 時刻 t における物体 B にはたらく棒の抗力の水平成分を求めよ．



基礎数学 II

$\boxed{6}$

$M(n,\mathbb{R})$ で $n\times n$ 実行列の全体を表し, $I\in M(n,\mathbb{R})$ で単位行列を表す. 以下の問いに答えよ.

(i) $I+X$ が可逆であるとして, $Y=(I-X)(I+X)^{-1}$ とおく. このとき, $I+Y$ もまた可逆で, $X=(I-Y)(I+Y)^{-1}$ が成り立つことを示せ.

(ii) $A\in M(n,\mathbb{R})$ が反対称行列で $I+A$ が可逆ならば, $G=(I-A)(I+A)^{-1}$ は直交行列であることを示せ. ただし, $A^\top=-A$ の成り立つ行列 A を反対称 (歪対称) 行列といい, 上付きの添え字 $^\top$ は行列の転置を表す.

(iii) ある $J\in M(n,\mathbb{R})$ に対し, $H\in M(n,\mathbb{R})$ は $H^\top J=-JH$ をみたし, $I+H$ は可逆とする. このとき $S=(I-H)(I+H)^{-1}$ は $S^\top JS=J$ をみたすことを示せ. (特に $J=I$ ならば, この問題は (ii) に帰着する.)

(iv) $n=2$ とする. (ii), (iii) における A, G, H, S を一般的な形で求めたい. (iii) における J はここでは特に $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ とする. まず, 2次の一般的な反対称行列を $A=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$ とおいて, G を求めよ. さらに, $H=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{R})$ とおいて, $H^\top J=-JH$ をみたすように H を定め, 続いて S を求めよ.

応用数学

$\boxed{1}$

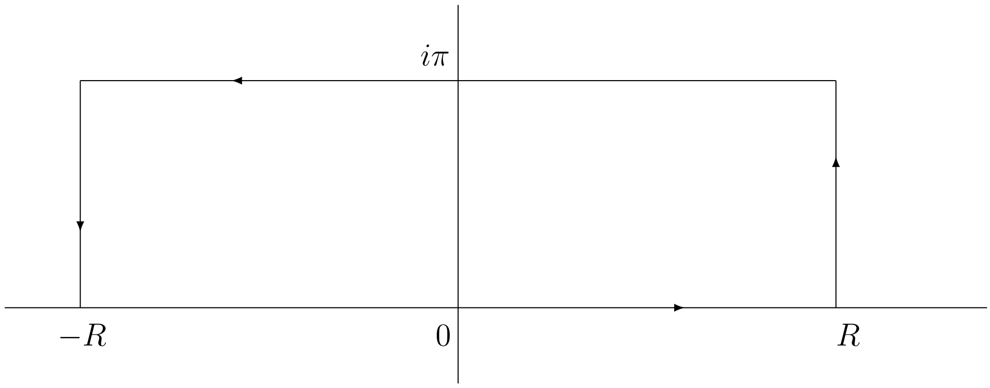
以下の問いに答えよ.

(i) $z=a$ が $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ の1位の極なら, $f(z)$ の $z=a$ における留数 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$ は

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{p(a)}{q'(a)}$$

で与えられることを証明せよ. ただし, $p(z)$, $q(z)$ はともに, $z=a$ のまわりで正則で, かつ $p(a)\neq 0$, $q(a)=0$, $q'(a)\neq 0$ である.

(ii) 関数 $g(x)=\dfrac{1}{\cosh x}$ のフーリエ変換 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\xi x}dx$ を, 以下に示す積分路に沿っての積分を考えて計算せよ. ただし, $\cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$.



グラフ理論

$\boxed{2}$

$N = [G = (V, E), \mathrm{cap}]$ を有向ネットワークとする．ここで，G は点集合 V と枝集合 E からなる有限有向グラフで，各枝 $e \in E$ には，非負実数 $\mathrm{cap}(e)$ が付されている．有向枝 e の始点を $\mathrm{tail}(e)$，終点を $\mathrm{head}(e)$ で表す．部分集合 $X \subseteq V$ から部分集合 $Y \subseteq V$ へ向かう有向枝の集合 $\{e \in E \mid \mathrm{tail}(e) \in X,\ \mathrm{head}(e) \in Y\}$ を $E(X, Y)$ と書く．とくに，点 $v \in V$ に対して，$E(\{v\}, V - \{v\})$，$E(V - \{v\}, \{v\})$ をそれぞれ $E^+(v)$，$E^-(v)$ で表す．

N においてソース $s \in V$，シンク $t \in V - \{s\}$ を指定したとき，次の二つの条件 (a),(b) を満たす実数値 $x(e)$, $e \in E$ を s, t-フローと定義する．

(a) $\sum_{e \in E^+(v)} x(e) - \sum_{e \in E^-(v)} x(e) = 0$, $\forall v \in V - \{s, t\}$,

(b) $0 \leqq x(e) \leqq \mathrm{cap}(e)$, $\forall e \in E$.

x の流量 $f(x)$ を $\sum_{e \in E^+(s)} x(e) - \sum_{e \in E^-(s)} x(e)$ により定める．s, t-フローの流量の最大値を $\lambda(s, t)$ と記す．点集合 $S \subseteq V$ は，$s \in S$, $t \in V - S$ を満たすとき s, t-カットといい，その容量 $\mathrm{cap}(S)$ を $\sum_{e \in E(S, V-S)} \mathrm{cap}(e)$ により定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の s, t-フロー x，s, t-カット S に対し，

$$f(x) = \sum_{e \in E(S, V-S)} x(e) - \sum_{e \in E(V-S, S)} x(e) \leqq \mathrm{cap}(S)$$

が成り立つことを示せ．

(ii) s, t-フロー x に対して，$x(e) = \mathrm{cap}(e)$ である枝 e の集合を A_x，$0 < x(e)$ である枝 e の集合を B_x，各枝 $e \in B_x$ の向きを逆にした枝の集合を $\overline{B_x}$ とする．グラフ $G_x = (V, (E - A_x) \cup \overline{B_x}))$ において，s を始点とする有向路により到達可能な点の集合を S_x としたとき，$t \in S_x$ なら $f(x) < \lambda(s, t)$ が成り立つことを示せ．

(iii) s, t-フロー x が $f(x) = \lambda(s, t)$ を満たすとき，(ii) の S_x に対して，$\mathrm{cap}(S_x) = \lambda(s, t)$ が成り立つことを示せ．

(iv) N において，異なる $k \geqq 3$ 個の点 $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ を選んだとき，$\lambda(v_1, v_k) \geqq \min\{\lambda(v_i, v_{i+1}) \mid i = 1, 2, \ldots, k-1\}$ が成り立つことを示せ．

オペレーションズリサーチ

$\boxed{3}$

以下の問 (i)，(ii) に答えよ．

(i) A を $n \times n$ の実対称行列とし，$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$$

とする．ただし，$\top$ は転置を表す．以下の (a) に答えよ．

(a) A が半正定値行列のとき，g は凸関数であることを示せ．

f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への凸関数とし，次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

この問題の大域的最適解の集合を X とし，X は空集合ではないとする．以下の (b)，(c) に答えよ．

(b) A が半正定値行列のとき，X は凸集合であることを示せ．

(c) A が正定値行列のとき，X の要素は唯一であることを示せ．

(ii) α と b_i $(i = 1, \ldots, m)$ を正の定数とする．決定変数が $(x_1, \ldots, x_m, y, z_1, \ldots, z_m)$ である次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}): & \text{minimize} & \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \alpha y + \sum_{i=1}^{m} z_i \\ & \text{subject to} & x_i \geqq b_i + y - z_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ & & y \geqq 0, \quad z_i \geqq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

$(x_1^*, \ldots, x_m^*, y^*, z_1^*, \ldots, z_m^*)$ を問題 (P) の大域的最適解とする．次の (A)-(C) に答えよ．

(A) 問題 (P) の カルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け．

(B) $z_i^* > 0$ である i に対して，$x_i^* = 1$ であることを示せ．

(C) $K = \{i \mid x_i^* < b_i\}$ とする．$y^* > 0$ のとき，$|K| \leqq \alpha$ となることを示せ．ただし，$|K|$ は集合 K の要素の数を表す．

現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

で表される線形システムに対して，$u \in U(x_0)$ の制約の下でコスト関数

$$J(x_0, u) = \int_0^{+\infty} \left\{ x(t)^\top Q x(t) + u(t)^2 \right\} dt \tag{2}$$

を最小化する最適レギュレータ問題を考える．ただし，$x(t), u(t)$ は，時刻 t における n 次元状態ベクトルとスカラー値制御入力であり，x_0 は n 次元初期状態ベクトルである．A, b および Q は，それぞれ $n \times n$ 実行列，n 次元実列ベクトルおよび $n \times n$ 非負定値実対称行列である．$^\top$ は行列またはベクトルの転置をあらわす．許容制御の集合 $U(x_0)$ を次式により定義する．

$$U(x_0) = \left\{ u:\ [0, +\infty) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0 \right\}$$

また，$n \times n$ 実対称行列 P を未知変数とする行列代数方程式

$$A^\top P + PA - Pbb^\top P + Q = 0 \tag{3}$$

を導入する．$A - bb^\top P$ のすべての固有値の実部が負である解 P のことを安定化解とよぶ．以下の問 (i)~(iv) に答えよ．

(i) 行列 P は (3) 式を満たすと仮定する．任意の正数 τ と任意の制御入力 u に対して

$$\int_0^\tau \left\{ x(t)^\top Q x(t) + u(t)^2 \right\} dt = x_0^\top P x_0 - x(\tau)^\top P x(\tau) + \int_0^\tau (u(t) + b^\top P x(t))^2 dt$$

が成り立つことを示せ．

(ii) 行列 P は (3) 式の安定化解であると仮定する．このとき，最適制御および最適コストは，それぞれ

$$u(t) = -b^\top P x(t),\ t \geqq 0,\ \text{および} \min_{u \in U(x_0)} J(x_0, u) = x_0^\top P x_0$$

で与えられることを示せ．

以下では，$n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$, $a \neq 0$, $q \geq 0$ とおく．

(iii) (3) 式の安定化解 P を a, q を用いて表せ．

(iv) $q = 0$ のときの最適レギュレータの閉ループ極を求め，開ループ極と比較せよ．さらに，このときの最適コストを計算せよ．

物理統計学

$\boxed{5}$

1次元のランダムウオークを考える．粒子は1ステップに時間τを要し，距離aだけ移動するものとする．またαを$0 < \alpha < 1$を満足する実数として，粒子が1ステップで正の方に移動する確率をα，負の方に移動する確率を$1-\alpha$とする．時刻$t=0$において原点$x=0$からスタートした粒子が，時刻tにおいてxと$x+dx$の間にいる確率を$p(x,t)dx$と表す．今，$t >> \tau$で十分多くのステップを移動したものとし，$p(x,t)$に対してはガウス分布が実現しているものとする．以下の問いに答えよ．

(i) 時刻$t=(n+1)\tau$と$t=n\tau$における粒子の分布関数を関係づける離散的なマスター方程式（差分方程式）を示し，これに対する連続近似から，$p(x,t)$が次の偏微分方程式を満足することを示せ．また，ここに現れる定数vとDをα, a, τを用いて表せ．

$$\partial p/\partial t + v\partial p/\partial x - D\partial^2 p/\partial x^2 = 0. \tag{1}$$

(ii) 偏微分方程式(1)の，本問の題意を満足する解を与えよ．

(iii) よく知られているように，ランダムウオークによる粒子の確率分布は2項分布により与えられる．Nが十分大きなときに成り立つ次の スターリングの公式

$\ln N! \simeq N(\ln N - 1) + (1/2)\ln(2\pi N)$

をこの2項分布に用いると，(ii)で得られたガウス分布を導くことが出来る．この方針に従い実際にガウス分布を導け．

力学系数学

6

以下の問いに答えよ．

(i) 実3次元ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の内積を $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ と書き，外積を $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ と書く．ベクトル $\boldsymbol{e}$ は $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \rangle = 1$ をみたすものとする．線形作用素 P, Q, J を以下のように定義する．ベクトルの成分 $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)^\top$ を用いて P, Q, J に対応する行列を書け．ただし，一般の行列 R の転置行列を $R^\top$ と書く．

$$(1)\ P\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e} \qquad (2)\ Q\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e} \qquad (3)\ J\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{v}$$

(ii) 次の関係式が成り立つことを示せ．

(1) $P^2 = P$　　(2) $Q^2 = Q$　　(3) $J^2 = -Q$

(4) $PQ = QP = 0$　　(5) $PJ = JP = 0$　　(6) $QJ = JQ = J$

(iii) 実数 θ と (i) で定めた行列 J について次の式が成り立つことを示せ．

$$\exp(\theta J) = P + (\cos\theta)Q + (\sin\theta)J$$

ただし，正方行列 A の指数関数は $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ と定義される．

(iv) 一般に，n 次正方行列 A と n 次元定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，n 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

の初期値問題を解け．

(v) 実数 ω と3次元定数ベクトル $\boldsymbol{v}$ が与えられたとき，3次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \omega \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$$

の初期値問題の解を P, Q, J を用いて書け．ただし，$\boldsymbol{e}$ は (i) で与えた3次元定数ベクトルである．

確率・統計論

$\boxed{7}$

X を平均 0, 分散 1 の標準正規分布に従う確率変数, すなわち

$$P(d_1 < X \leqq d_2) = \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\quad x^2/2} dx$$

を $\quad \infty < d_1 < d_2 < \infty$ に対して満たすものとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) 確率変数 $Y = X^2$ の確率密度関数を計算せよ. すなわち,

$$P(Y \leqq d) = \int_0^d p(y) dy$$

を各 $d(> 0)$ に対して満たす関数 $p : (0, \infty) \to (0, \infty)$ を求めよ.

(ii) 実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$$

を持つとする (b_∞ は定数). 確率変数列 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$Z_n = a_n X + b_n$$

で定義する.

(a) Z_n の平均

$$E[Z_n]$$

分散

$$\mathrm{Var}[Z_n] = E\left[(Z_n \quad E[Z_n])^2\right],$$

及び 3 次モーメント

$$E[Z_n^3]$$

を求めよ.

(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$P\left(|Z_n \quad b_n| \geqq \epsilon\right) \leqq \frac{\mathrm{Var}[Z_n]}{\epsilon^2}$$

が成立することを示し, これより任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|Z_n \quad b_\infty| \geqq \epsilon\right) = 0$$

が成立することを導け. (このことを Z_n は $n \to \infty$ のとき定数 b_∞ に確率収束すると呼ぶ.)