基礎数学 I

$\boxed{1}$

実数列 a_j $(j = 1, 2, \ldots)$ と漸化式

$$\begin{cases} p_0(x) = 1, \\ p_1(x) = x - a_1, \\ p_k(x) = (x - a_k)p_{k-1}(x) - p_{k-2}(x), \quad (k = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

によって実変数 x の多項式の列 $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ を定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の x において $p_k(x)$ と $p_{k-1}(x)$ が同時に 0 となることはないことを示せ．

(ii) $x = \lambda$ を k 次多項式 $p_k(x)$ の実の零点とするとき，

$$p_{k+1}(\lambda)p_{k-1}(\lambda) < 0, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 多項式 $p_k(x)$ の導関数を $p_k'(x)$ とかく．

$$q_k(x) = p_k'(x)p_{k-1}(x) - p_k(x)p_{k-1}'(x), \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

とおくとき，任意の x において $q_k(x) \geqq q_{k-1}(x)$，および，$q_k(x) \geqq 1$ が成り立つことを示せ．

(iv) 多項式 $p_k(x)$ の実の零点は単根であることを示せ．

(v) 多項式 $p_k(x)$ の実の零点 $\lambda_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$ が $\lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k)} < \cdots < \lambda_\ell^{(k)}$ をみたし，多項式 $p_{k+1}(x)$ の実の零点 $\lambda_j^{(k+1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ が $\lambda_1^{(k+1)} < \lambda_2^{(k+1)} < \cdots < \lambda_m^{(k+1)}$ をみたすとする．このとき，$\ell = k$，$m = k + 1$ で

$$\lambda_1^{(k+1)} < \lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k+1)} < \lambda_2^{(k)} < \cdots < \lambda_k^{(k+1)} < \lambda_k^{(k)} < \lambda_{k+1}^{(k+1)}$$

が成り立つことを示せ．