グラフ理論

$\boxed{2}$

$N = [G = (V, E), \mathrm{cap}]$ を有向ネットワークとする．ここで，G は点集合 V と枝集合 E からなる有限有向グラフで，各枝 $e \in E$ には，非負実数 $\mathrm{cap}(e)$ が付されている．有向枝 e の始点を $\mathrm{tail}(e)$，終点を $\mathrm{head}(e)$ で表す．部分集合 $X \subseteq V$ から部分集合 $Y \subseteq V$ へ向かう有向枝の集合 $\{e \in E \mid \mathrm{tail}(e) \in X,\ \mathrm{head}(e) \in Y\}$ を $E(X, Y)$ と書く．とくに，点 $v \in V$ に対して，$E(\{v\}, V - \{v\})$，$E(V - \{v\}, \{v\})$ をそれぞれ $E^+(v)$，$E^-(v)$ で表す．

N においてソース $s \in V$，シンク $t \in V - \{s\}$ を指定したとき，次の二つの条件 (a),(b) を満たす実数値 $x(e)$, $e \in E$ を s, t-フローと定義する．

(a) $\sum_{e \in E^+(v)} x(e) - \sum_{e \in E^-(v)} x(e) = 0, \ \forall v \in V - \{s, t\}$,

(b) $0 \leqq x(e) \leqq \mathrm{cap}(e), \ \forall e \in E$.

x の流量 $f(x)$ を $\sum_{e \in E^+(s)} x(e) - \sum_{e \in E^-(s)} x(e)$ により定める．s, t-フローの流量の最大値を $\lambda(s, t)$ と記す．点集合 $S \subseteq V$ は，$s \in S$, $t \in V - S$ を満たすとき s, t-カットといい，その容量 $\mathrm{cap}(S)$ を $\sum_{e \in E(S, V-S)} \mathrm{cap}(e)$ により定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の s, t-フロー x，s, t-カット S に対し，

$$f(x) = \sum_{e \in E(S, V-S)} x(e) - \sum_{e \in E(V-S, S)} x(e) \leqq \mathrm{cap}(S)$$

が成り立つことを示せ．

(ii) s, t-フロー x に対して，$x(e) = \mathrm{cap}(e)$ である枝 e の集合を A_x，$0 < x(e)$ である枝 e の集合を B_x，各枝 $e \in B_x$ の向きを逆にした枝の集合を $\overline{B_x}$ とする．グラフ $G_x = (V, (E - A_x) \cup \overline{B_x}))$ において，s を始点とする有向路により到達可能な点の集合を S_x としたとき，$t \in S_x$ なら $f(x) < \lambda(s, t)$ が成り立つことを示せ．

(iii) s, t-フロー x が $f(x) = \lambda(s, t)$ を満たすとき，(ii) の S_x に対して，$\mathrm{cap}(S_x) = \lambda(s, t)$ が成り立つことを示せ．

(iv) N において，異なる $k \geqq 3$ 個の点 $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ を選んだとき，$\lambda(v_1, v_k) \geqq \min\{\lambda(v_i, v_{i+1}) \mid i = 1, 2, \ldots, k-1\}$ が成り立つことを示せ．