現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

で表される線形システムに対して，$u \in U(x_0)$ の制約の下でコスト関数

$$J(x_0, u) = \int_0^{+\infty} \left\{ x(t)^\top Q x(t) + u(t)^2 \right\} dt \tag{2}$$

を最小化する最適レギュレータ問題を考える．ただし，$x(t), u(t)$ は，時刻 t における n 次元状態ベクトルとスカラー値制御入力であり，x_0 は n 次元初期状態ベクトルである．A, b および Q は，それぞれ $n \times n$ 実行列，n 次元実列ベクトルおよび $n \times n$ 非負定値実対称行列である．$^\top$ は行列またはベクトルの転置をあらわす．許容制御の集合 $U(x_0)$ を次式により定義する．

$$U(x_0) = \left\{ u : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0 \right\}$$

また，$n \times n$ 実対称行列 P を未知変数とする行列代数方程式

$$A^\top P + PA - Pbb^\top P + Q = 0 \tag{3}$$

を導入する．$A - bb^\top P$ のすべての固有値の実部が負である解 P のことを安定化解とよぶ．以下の問 (i)～(iv) に答えよ．

(i) 行列 P は (3) 式を満たすと仮定する．任意の正数 τ と任意の制御入力 u に対して

$$\int_0^\tau \left\{ x(t)^\top Q x(t) + u(t)^2 \right\} dt = x_0^\top P x_0 - x(\tau)^\top P x(\tau) + \int_0^\tau (u(t) + b^\top P x(t))^2 dt$$

が成り立つことを示せ．

(ii) 行列 P は (3) 式の安定化解であると仮定する．このとき，最適制御および最適コストは，それぞれ

$$u(t) = -b^\top P x(t),\ t \geqq 0,\ \text{および} \min_{u \in U(x_0)} J(x_0, u) = x_0^\top P x_0$$

で与えられることを示せ．

以下では，$n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$, $a \neq 0$, $q \geq 0$ とおく．

(iii) (3) 式の安定化解 P を a, q を用いて表せ．

(iv) $q = 0$ のときの最適レギュレータの閉ループ極を求め，開ループ極と比較せよ．さらに，このときの最適コストを計算せよ．