基礎数学 I

1

変数 x の関数 $f(x) = \tan^{-1} x$, $(f(0) = 0)$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とかく．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の自然数 n について

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin\left(n(y + \frac{\pi}{2})\right), \quad (y = \tan^{-1} x)$$

を示せ．

(ii)

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m (2m)! & (n = 2m+1) \\ 0 & (n = 2m) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 剰余項 $R_{2n}(x)$ を用いて

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + R_{2n}(x),$$
$$R_{2n}(x) = \frac{1}{2n} \cos^{2n} z \cdot \sin\left(2n(z + \frac{\pi}{2})\right) \cdot x^{2n}, \quad (z = \tan^{-1} \theta x, \quad 0 < {}^{\exists}\theta < 1)$$

とおくとき，$|x| \leqq 1$ ならば

$$\lim_{n \to \infty} |R_{2n}(x)| = 0$$

となることを示せ．

(iv)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

を示せ．

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

Let $f^{(n)}(x)$ be the n-th derivative of the function $f(x) = \tan^{-1} x$ with $f(0) = 0$. Answer the following questions.

(i) Show that

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin\left(n(y + \frac{\pi}{2})\right) \quad \text{with} \quad y = \tan^{-1} x$$

for any natural number n.

(ii) Show that

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m (2m)! & \text{for} \quad n = 2m+1 \\ 0 & \text{for} \quad n = 2m \end{cases}.$$

(iii) Let $R_{2n}(x)$ be the remainder defined by

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + R_{2n}(x),$$

$$R_{2n}(x) = \frac{1}{2n} \cos^{2n} z \cdot \sin\left(2n(z + \frac{\pi}{2})\right) \cdot x^{2n} \quad \text{with} \quad z = \tan^{-1} \theta x \quad \text{and} \quad 0 < {}^{\exists}\theta < 1.$$

Show that

$$\lim_{n \to \infty} |R_{2n}(x)| = 0 \quad \text{for} \quad |x| \leqq 1.$$

(iv) Show that

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

アルゴリズム基礎

2

クィックソート (QuickSort) に関して以下の問いに答えよ.

(i) 与えられた n 個の整数 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ を整列する QuickSort のアルゴリズムを与えよ.

(ii) 整数 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ と k $(1 \leqq k \leqq n)$ が与えられたとする. $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ のうち大きいほうから k 個を順不同で出力する問題に対して, (i) のアルゴリズムを修正し, 全体の整列を要しないアルゴリズムを設計し, 正当性を示せ.

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Answer the following questions about QuickSort.

(i) Design a QuickSort algorithm for sorting n given integers a_0, a_1, ..., a_{n-1}.

(ii) Modify the above algorithm so that for any k, $1 \leqq k \leqq n$, it can find the greatest k elements from a_0, a_1, ..., a_{n-1} without sorting all of them. Also show the correctness.

線形計画

3

次の線形計画問題 P(θ) を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\theta):\quad \text{minimize}\quad & \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x_i+y_i) \\
\text{subject to}\quad & \sum_{i=1}^{n} b_i\,(x_i+y_i) = 1, \\
& \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \theta, \\
& x_i \geqq 0, \quad i=1,\ldots,n, \\
& y_i \geqq 0, \quad i=1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

ここで，$x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n$ は決定変数であり，$a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$ は正定数，θ は実パラメータである．正定数 $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$ は次の条件を満たすと仮定する．

$$
i<j \implies \frac{a_i}{b_i} > \frac{a_j}{b_j}
$$

以下の問 (i) – (v) に答えよ．

(i) $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ とする．x_k と y_k を基底変数，それら以外のすべての変数を非基底変数とする基底解を計算せよ．さらにその基底解が問題 P(θ) の実行可能解であるようなパラメータ θ の範囲を求めよ．

(ii) x_n と y_n を基底変数，それら以外のすべての変数を非基底変数とする基底解は問題 P(0) の最適解であることを示せ．

(iii) 問 (ii) の基底解が問題 P(θ) の最適解となるようなパラメータ θ の範囲を求めよ．

(iv) 問題 P(θ) の双対問題を D(θ) と表す．問題 D(θ) を書け．

(v) 問題 D(0) の最適解を求めよ．

Linear Programming

$\boxed{3}$

Consider the following linear programming problem $\mathrm{P}(\theta)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\theta): \quad \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x_i + y_i) \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} b_i\,(x_i + y_i) = 1, \\
& \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \theta, \\
& x_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\
& y_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n,
\end{aligned}$$

where $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ are decision variables, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ are positive constants, and θ is a real parameter. Assume that the positive constants $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ satisfy the following condition:

$$i < j \implies \frac{a_i}{b_i} > \frac{a_j}{b_j}$$

Answer the following questions (i) – (v):

(i) Let $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Compute the basic solution such that x_k and y_k are basic variables and all the rest of the variables are non-basic variables. Moreover, find the range of parameter θ such that this basic solution is feasible to problem $\mathrm{P}(\theta)$.

(ii) Show that the basic solution such that x_n and y_n are basic variables and all the rest of the variables are non-basic variables is optimal to problem $\mathrm{P}(0)$.

(iii) Find the range of θ such that the basic solution of (ii) is optimal to problem $\mathrm{P}(\theta)$.

(iv) Let $\mathrm{D}(\theta)$ denote the dual problem of $\mathrm{P}(\theta)$. Write out $\mathrm{D}(\theta)$.

(v) Find an optimal solution of problem $\mathrm{D}(0)$.

線形制御理論

$\boxed{4}$

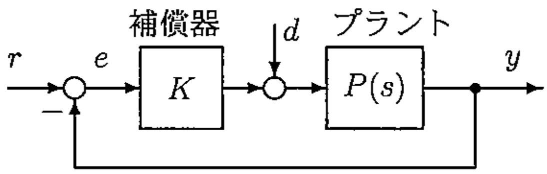
伝達関数

$$P(s) = \frac{b}{s(as+1)}e^{-s}$$

で表される連続時間線形システムを考える．ここに，a と b は実定数である．
以下の問いに答えよ．

(i) 時刻 t における $P(s)$ の入力および出力をそれぞれ $u(t)$ と $y(t)$ とする．入力 $u(t)$ を単位ステップ信号としたとき，$y(t)$ は直線 $y = 2t - 4$ に漸近した．このときの a と b の値を求めよ．

(ii) $(a, b) = (0, 1)$ とする．下図のフィードバック系に対して定数ゲイン $K > 0$ を設計する．ただし，r, d, y および e は，それぞれ目標値，外乱，プラント出力および追従偏差である．



問 (a)–(c) に答えよ．

(a) $P(j\omega)$ のナイキスト線図の概略を描け．ただし，$0 < \omega < +\infty$ とする．

(b) フィードバック系を安定にするゲイン $K > 0$ の範囲を求めよ．

(c) r と d はともに単位ステップ信号であり，e の定常値を e_s とする．(b) で得られた K の範囲において $|e_s|$ の下限値を求めよ．

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

Consider the linear continuous-time system described by the transfer function

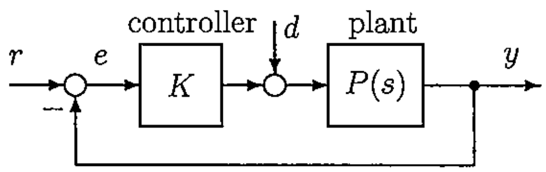
$$P(s) = \frac{b}{s(as+1)} e^{-s},$$

where a and b are real constants.

Answer the following questions.

(i) Let $u(t)$ and $y(t)$ be the input and the output of this system at time t, respectively. Find the values of a and b such that $y(t)$ asymptotically approaches the line $y = 2t-4$ when $u(t)$ is a unit step signal.

(ii) Let $(a, b) = (0, 1)$. We wish to design a constant gain $K > 0$ for the feedback system shown in the figure below, where r, d, y, and e denote the reference signal, the disturbance, the plant output, and the tracking error, respectively.



Answer the questions (a)–(c).

(a) Sketch the Nyquist plot of $P(j\omega)$ for $0 < \omega < +\infty$.

(b) Determine the range of $K > 0$ that stabilizes the feedback system.

(c) Let both r and d be unit step signals. Denote by e_s the steady state value of e. Compute the infimum of $|e_s|$ over the range of K obtained in (b).

基礎力学

5

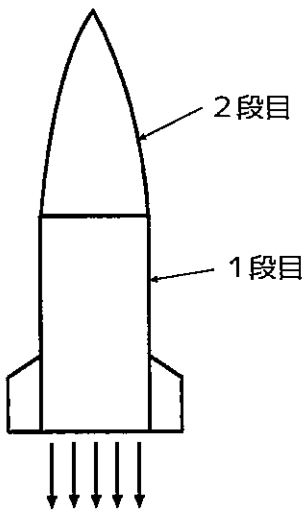
ロケットが重力や大気の摩擦力の無視できる宇宙空間で最初静止しているとする．ロケットは最初全質量$M+m$で，質量mの燃料を積載しており，単位時間あたり質量kの燃料をロケットから相対的に一定の速度Vで噴射し始める．kは定数とする．

(i) 運動量の保存則を用いて，任意の時刻でのロケットの加速度を求めよ．

(ii) 燃料をすべて噴射した後のロケットの速度を求めよ．

次に，宇宙空間に最初静止している２段ロケットを考える．１段目および２段目の最初の全質量は，M_1+m_1，$M-M_1+m-m_1$で燃料をそれぞれm_1，$m-m_1$積載している．ここで，$M_1<M$，$m_1<m$とする．各段は単位時間当り質量kの燃料をロケットから相対的に一定の速度Vで噴射する．図に示すように，ロケットは静止状態から１段目が燃料を噴射して加速する．１段目の燃料がなくなったあと１段目を切り離し２段目の燃料を噴射し始める．

(iii) 燃料をすべて噴射した後の２段目の速度を求めよ．



Basic Mechanics

$\boxed{5}$

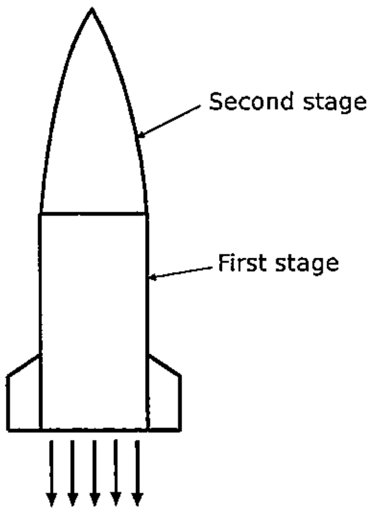
Let a rocket of initial total mass $M + m$ carrying fuel of mass m be initially at rest in outer space, where gravitational force and air resistance are negligibly small. The rocket begins to eject fuel at a constant time rate k of mass with a constant velocity V relative to the rocket.

(i) Find the acceleration of the rocket at an arbitrary time, by using the principle of conservation of momentum.

(ii) Find the velocity of the rocket at the time when all the fuel has been ejected.

We consider a two-stage rocket, which is initially at rest in the outer space. The first and second stages have respective initial total masses $M_1 + m_1$ and $M - M_1 + m - m_1$, carrying fuel of mass m_1 and $m - m_1$, respectively, where $M_1 < M$ and $m_1 < m$. Each stage ejects fuel at a constant time rate k of mass with a constant velocity V relative to them. The rocket is accelerated from rest by ejection of fuel from the first stage, as shown in the figure. After the fuel of the first stage is exhausted, the second stage separates from the first one and begins to eject fuel.

(iii) Find the velocity of the second stage at the time when all the fuel has been ejected.



基礎数学 II

$\boxed{6}$

$\mathbb{R}^N$ の $n(<N)$ 次元線形部分空間を V_n とし，V_n 上の一次独立なベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とする．さらに，$\boldsymbol{x}$ を $\mathbb{R}^N$ 上の点とし，$\boldsymbol{x}$ と V_n との距離を

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_n) := \inf_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n} ||\boldsymbol{x} - \alpha_1\boldsymbol{v}_1 - \alpha_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \alpha_n\boldsymbol{v}_n||$$

で表す．ただし，$||\boldsymbol{f}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}\rangle}$ で $\boldsymbol{f}$ のノルム，$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle$ で $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{g}$ の内積をそれぞれ表す．また，グラム行列式を

$$G(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n) = \det\big(\langle \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j\rangle\big)_{1\leqq i,j\leqq n}$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|| = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)$ をみたす V_n 上の点 $\boldsymbol{y}$ が存在することを示せ．

(ii) $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|| = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)$ を実現する V_n 上の点を $\boldsymbol{y}$ とする．このとき，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ は V_n 上の任意のベクトルと直交すること，すなわち

$$\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}\rangle = 0, \quad {}^{\forall}\boldsymbol{w} \in V_n$$

を示せ．

(iii) 次式の成り立つことを示せ．

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)^2 = \frac{G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{x})}{G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)}$$

ここで，$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ が一次独立ならば，$G(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k) \neq 0$ であることは用いてよい．

(iv) $G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) > 0$ を示せ．

(v) $V_m \subset V_n$ $(0 \leqq m < n)$ のとき，

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_n) \leqq \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_m)$$

を示すことにより，

$$G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \leqq G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1})\, G(\boldsymbol{v}_n)$$

を証明せよ．

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let V_n be an n-dimensional linear subspace of $\mathbb{R}^N$ with $n < N$, and let $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ be linearly independent vectors of V_n. For a given point $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^N$, the distance between $\boldsymbol{x}$ and V_n is defined to be

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_n) := \inf_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n} ||\boldsymbol{x} - \alpha_1\boldsymbol{v}_1 - \alpha_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \alpha_n\boldsymbol{v}_n||,$$

where $||\boldsymbol{f}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}\rangle}$. Denote by $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle$ the inner product of $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{g}$, and define Gram's determinant by

$$G(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n) := \det\big(\langle \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j\rangle\big)_{1\leqq i,j\leqq n}.$$

Answer each of the following questions.

(i) Show that there exists a point $\boldsymbol{y}$ in V_n such that $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)$.

(ii) Let $\boldsymbol{y}$ denote a point which realizes $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)$. Show that $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ is orthogonal to any vector of V_n, *i.e.*,

$$\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}\rangle = 0, \quad {}^\forall \boldsymbol{w} \in V_n.$$

(iii) Show that

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)^2 = \frac{G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{x})}{G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)}.$$

It is well known that if $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ are linearly independent vectors, then Gram's determinant can never vanish, $G(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k) \neq 0$.

(iv) Show that $G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) > 0$.

(v) Show that, if $V_m \subset V_n$ $(0 \leqq m < n)$, then

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_n) \leqq \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_m)$$

and thereby prove that

$$G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \leqq G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1})G(\boldsymbol{v}_n).$$

応用数学

1

パラメータ $0 \leqq r < 1$ をもつ関数

$$K_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

を考える. また, 周期 2π の連続な周期関数 $u(\theta)$ と $K_r(\theta)$ との合成積を

$$(u * K_r)(\theta) = \int_0^{2\pi} u(\phi) K_r(\theta - \phi) d\phi$$

で定義する. 以下の問いに答えよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} K_r(\phi)d\phi = 1, \int_0^{2\pi} K_r(\theta - \phi)d\phi = 1$ を示せ.

(ii) $r \to 1$ のとき, $K_r(\theta)$ は θ の関数として連続とはならないことを示せ.

(iii) $r \to 1$ のとき, $(u * K_r)(\theta) \to u(\theta)$ を証明せよ. ヒント : 適当な $\delta > 0$ をとって, 単位円周上の積分を, 円弧 $|\theta - \phi| \leqq \delta$ 上の積分と円弧の補集合上の積分とに分けて評価する.

Applied Mathematics

1

Let

$$K_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,$$

where r is a real parameter with $0 \leqq r < 1$. The convolution of continuous periodic functions $u(\theta)$ and $K_r(\theta)$ of period 2π is defined to be

$$(u * K_r)(\theta) = \int_0^{2\pi} u(\phi)K_r(\theta-\phi)d\phi.$$

Answer the following questions.

(i) Show that $\int_0^{2\pi} K_r(\phi)d\phi = 1$ and $\int_0^{2\pi} K_r(\theta-\phi)d\phi = 1$.

(ii) Show that $K_r(\theta)$ will not be continuous in θ as $r \to 1$.

(iii) Show that $(u * K_r)(\theta) \to u(\theta)$ as $r \to 1$. Hint: Take a positive constant $\delta > 0$, and divide the unit circle into the union of the arc determined by $|\theta - \phi| \leqq \delta$ and the complement to the arc. Then, evaluate an appropriate integral according to the division of the unit circle.

グラフ理論

$\boxed{2}$

$G = (V, E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る有向グラフ，$N = [G, w]$ を G の各枝 $e \in E$ に実数値の重み $w(e)$ を与えて得られるネットワークとする．二点 $u, v \in V$ に対し，G における u から v への有向経路 $P \subseteq E$ は同じ点を2度以上経由しないとき単純と呼び，その重み $w(P)$ を $\sum_{e \in P} w(e)$ で定める．u から v への距離 $d(u, v)$ を u から v への単純有向経路 P の中でその重み $w(P)$ の最小値として定める．ただし，u から v への有向経路が存在しないとき $d(u, v) = \infty$，$u = v$ のとき $d(u, v) = 0$ とする．ここで，一つの点 $s \in V$ を指定し，この点 s から他のすべての点 $v \in V$ への距離 $d(s, v)$ を求める問題を単一始点最短路問題と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(i) N が有向閉路をもたないとき，単一始点最短路問題を線形時間で解くアルゴリズムを記述し，その正当性について説明せよ．

(ii) N の枝重みがすべて非負であるとする（有向閉路は存在し得る）．このとき，単一始点最短路問題を解くダイクストラ法を記述し，その正当性について説明せよ．また，その時間計算量を評価せよ．

(iii) N が負の枝重みをもつとき，単一始点最短路問題に対するダイクストラ法の出力する値は正しい距離とならないことがある．そのような具体例を作成し，ダイクストラ法の出力する値が正しい距離とならないことを説明せよ．

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a directed graph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, w]$ denote a network obtained from G by assigning a real value $w(e)$ to each edge $e \in E$ as its weight. For two vertices $u, v \in V$, a directed path $P \subseteq E$ from u to v is called *simple* if it does not visit the same vertex more than once, and its weight $w(P)$ is defined to be $\sum_{e \in P} w(e)$. The distance $d(u, v)$ from u to v is defined to be the minimum among the weights $w(P)$ of simple paths P from u to v, where $d(u, v) = 0$ for $u = v$, and $d(u, v)$ is defined to be ∞ if G has no path P from u to v. Given a designated vertex $s \in V$, the *single source shortest path problem* requires to compute the distance $d(s, v)$ for all vertices $v \in V$. Answer the following questions.

(i) Assume that N has no directed cycle. Describe a linear-time algorithm for the single source shortest path problem together with a proof for its correctness.

(ii) Assume that all edge weights in N are nonnegative, where N possibly contains a directed cycle. Describe Dijkstra's algorithm for the single source shortest path problem together with a proof for its correctness. Also evaluate its time complexity.

(iii) If N contains an edge with a negative weight, then Dijkstra's algorithm may fail to output the correct distance. Construct such an example, and explain how Dijkstra's algorithm fails to compute the correct distance.

オペレーションズ・リサーチ

3

$\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, n)\}$, $\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\ (i = 1, \ldots, n)\}$ とする．関数 $\psi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ を

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$$

と定義する．ただし，ln は自然対数を表し，$0 \ln 0 = 0$ とする．さらに，関数 $B_\psi : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \psi(\boldsymbol{x}) - \psi(\boldsymbol{y}) - \nabla\psi(\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

ただし，$\top$ は転置記号である．

次に，パラメータ $t \in \mathbb{R}$ を含む非線形計画問題 $\mathrm{P}(t)$ を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(t) & \text{minimize} & t\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & & x_i \geqq 0\ \ (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

ここで，決定変数は $\boldsymbol{x}$ であり，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ は定数ベクトルである．問題 $\mathrm{P}(t)$ には唯一の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が存在し，$x_i(t) > 0\ (i = 1, \ldots, n)$ が成り立つことが知られている．以下の問 (i)–(iv) に答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ に対して，$B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ となることを示せ．

(ii) 問題 $\mathrm{P}(t)$ のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け．

(iii) $\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(iv) ベクトル $\boldsymbol{c}$ の成分 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対して $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$ が成り立つとする．$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = (0, \ldots, 0, 1)^\top$ となることを示せ．

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ and $\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}$. Let $\psi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ be a function defined by

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i,$$

where ln denotes the natural logarithm with the convention $0 \ln 0 = 0$. Moreover, let $B_\psi : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ be a function defined by

$$B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \psi(\boldsymbol{x}) - \psi(\boldsymbol{y}) - \nabla\psi(\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$

where $\top$ denotes transposition.

Consider the following nonlinear programming problem $\mathrm{P}(t)$ with a real parameter t.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(t) & \text{minimize} & t\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & & x_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, n, \end{array}$$

where $\boldsymbol{x}$ is the vector of decision variables, and $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ and $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ are constant vectors. It is known that the problem $\mathrm{P}(t)$ has a unique solution $\boldsymbol{x}(t)$ such that $x_i(t) > 0,\ i = 1, \ldots, n$.

Answer the following questions (i)–(iv).

(i) Show that $B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ for all $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

(ii) Write the Karush-Kuhn-Tucker conditions for the problem $\mathrm{P}(t)$.

(iii) Find the solution $\boldsymbol{x}(t)$.

(iv) Suppose that the elements $c_1, \ldots, c_n$ of the vector $\boldsymbol{c}$ satisfy $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$. Show that $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = (0, \ldots, 0, 1)^\top$.

現代制御論

$\boxed{4}$

線形状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

で与えられるシステムを考える．ただし $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}^q$ は入力，$y(t) \in \mathbb{R}^p$ は出力を表す．係数行列は $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ である．このシステムが可制御であることを (A, B) が可制御という．同様にこのシステムが可観測であることを (C, A) が可観測という．(A, B) が可制御であるためには，行列

$$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

が行最大階数をもつことが必要十分であることは既知であるとせよ．伝達関数 $H(s)$ に対して (1) $H(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B$, (2) (A, B) は可制御, (3) (C, A) は可観測，を満たす行列の組 (A, B, C) を最小実現とよぶ．ただし I は単位行列である．このとき以下の問いに答えよ．

(i) (A, B) が可制御であるためには，任意の $\lambda \in \sigma(A)$ に対して行列

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix}$$

が行最大階数をもつことが必要十分であることを証明せよ．ただし $\sigma(A)$ は行列 A の固有値の集合を表す．

(ii) 行列 A, B がブロック構造

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

をもつとする．ただし $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times q}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times q}$, $n = n_1 + n_2$ である．ここで $\sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset$ と仮定する．このとき (A, B) が可制御であるためには，(A_1, B_1) が可制御かつ (A_2, B_2) が可制御であることが必要十分であることを証明せよ．

(iii) 伝達関数

$$H(s) = \frac{R}{s - \lambda}, \quad R \in \mathbb{R}^{p \times q}, \ \operatorname{rank} R = n$$

を考える．ここで $R = CB$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ と分解する．そして $A = \lambda I$ とおく．このとき行列の組 (A, B, C) は $H(s)$ の最小実現であることを証明せよ．

(iv) 伝達関数

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{5s - 7}{s^2 - 3s + 2} & \dfrac{5s - 9}{s^2 - 3s + 2} \\ \dfrac{2s - 3}{s^2 - 3s + 2} & \dfrac{5s - 7}{s^2 - 3s + 2} \end{bmatrix}$$

の最小実現を一つ求めよ．

Modern Control Theory

4

Consider the linear state equation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the system state, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ is the system input, and $y(t) \in \mathbb{R}^p$ is the system output. The matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$, and $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ are constant matrices. If the system is controllable, we say (A, B) is controllable. If the system is observable, we say (C, A) is observable. We shall use the fact that (A, B) is controllable if and only if the matrix

$$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

is of full row rank. Let I be the identity matrix. We say that a matrix triple (A, B, C) is a minimal realization of a transfer function $H(s)$ if (1) $H(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B$, (2) (A, B) is controllable, and (3) (C, A) is observable. Answer the following questions.

(i) Prove that (A, B) is controllable if and only if the matrix

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix}$$

is of full row rank for any $\lambda \in \sigma(A)$, where $\sigma(A)$ is the set of eigenvalues of A.

(ii) Suppose that the matrices A and B have the following block structure:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

where $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times q}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times q}$, and $n = n_1+n_2$. Assume that $\sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset$. Prove that (A, B) is controllable if and only if (A_1, B_1) and (A_2, B_2) are both controllable.

(iii) Given a system described by the transfer function

$$H(s) = \frac{R}{s-\lambda}, \quad R \in \mathbb{R}^{p\times q}, \quad \operatorname{rank} R = n,$$

write R as $R = CB$, where $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, and $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$. Let $A = \lambda I$. Prove that (A, B, C) is a minimal realization of $H(s)$.

(iv) Find a minimal realization of the transfer function

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{5s-7}{s^2-3s+2} & \dfrac{5s-9}{s^2-3s+2} \\[2ex] \dfrac{2s-3}{s^2-3s+2} & \dfrac{5s-7}{s^2-3s+2} \end{bmatrix}.$$

物理統計学

$\boxed{5}$

$V(t)$ はオルンシュタイン・ウーレンベック過程で，次のランジュバン方程式に従う．

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = -\gamma V(t) + f(t)$$

ここで，γ は正の定数．$f(t)$ は白色雑音で，$\langle f(t)\rangle = 0$，$\langle f(t)f(s)\rangle = 2D\delta(t-s)$．（$\langle A\rangle$ は A の平均を表し，D は正の定数，$\delta(t)$ はディラックのデルタ関数.）

(i) $V(t_0) = V_0$（V_0 は定数）のとき $V(t) = V_0 e^{-\gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s e^{\gamma(s-t)} f(s)$ を示せ.

(ii) $\langle V(t)\rangle$ と $\sigma(t)^2 = \langle V(t)^2\rangle - \langle V(t)\rangle^2$ を求めよ.

(iii) 定常状態での時間相関関数 $\varphi_V(t) = \lim_{s\to\infty} \langle V(t+s)V(s)\rangle$ を求めよ.

(vi) $V(t)$ の確率密度関数 $P(v,t)$ に関するフォッカー・プランク方程式を導き，定常解 $P_{\mathrm{st}}(v)$ を求めよ.

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Let $V(t)$ be the Ornstein-Uhlenbeck process which obeys the following Langevin equation,

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = -\gamma V(t) + f(t),$$

where γ is a positive constant and $f(t)$ the white noise, whose mean and correlation function are given by $\langle f(t)\rangle = 0$ and $\langle f(t)f(s)\rangle = 2D\delta(t-s)$, respectively. Here, $\langle A\rangle$ denotes the average of A, D a positive constant and $\delta(t)$ Dirac's delta function.

(i) Show that $V(t) = V_0 e^{-\gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s e^{\gamma(s-t)} f(s)$ for $V(t_0) = V_0$, where V_0 is a constant.

(ii) Evaluate $\langle V(t)\rangle$ and $\sigma(t)^2 = \langle V(t)^2\rangle - \langle V(t)\rangle^2$.

(iii) Find the time-correlation function at the stationary state, $\varphi_V(t) = \lim_{s\to\infty} \langle V(t+s)V(s)\rangle$.

(iv) Derive the Fokker-Planck equation for the probability density function $P(v,t)$ of $V(t)$ and find a stationary solution, $P_{\mathrm{st}}(v)$.

力学系数学

6

$\mathbb{R}^{n\times n}$ で $n\times n$ 実行列の全体を表す．$\mathbb{R}^{n\times n}$ において次の常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\frac{dY}{dt}=(A+\lambda B(t))Y,\quad Y(0)=I. \tag{$*$}$$

ただし，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ は定数行列，$B(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ は $t=0$ を含むある区間 (a,b) で定義された連続関数で，λ は実のパラメータである．また，I は単位行列である．特に，$\lambda=0$ のときの微分方程式

$$\frac{dX}{dt}=AX,\quad X(0)=I$$

の解はよく知られているように $X(t)=e^{tA}$ で与えられる．以下の各問に答えよ．

(i) $(*)$ の解を $Y(t)=e^{tA}W(t)$ の形に仮定して，$W(t)$ に対する微分方程式を導き，それを利用して $Y(t)$ のみたすべき積分方程式を見出せ．

(ii) (i) で導いた積分方程式の解を $Y(t;\lambda)$ で表す．$Y(t;\lambda)$ が λ について微分可能であるのは既知として，

$$\left.\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}Y(t;\lambda)\right|_{\lambda=0}=n!Y_n(t),\quad n=0,1,2,\cdots$$

を示せ．ただし，$Y_n(t)$ は以下のように定義される．

$$Y_0(t)=e^{tA},$$

$$Y_n(t)=\int_0^t e^{(t-s)A}B(s)Y_{n-1}(s)ds,\quad n=1,2,\cdots \tag{$**$}$$

(iii) (a,b) の任意の閉部分区間で $t=0$ をその中に含むようなものを J とし，定数 M, β を以下の式で定義する．ただし，$\|\cdot\|$ で行列ノルムを表す．

$$M:=\max_{t\in J}\|e^{tA}\|,\quad \beta:=\max_{t\in J}\|B(t)\|.$$

$(**)$ を用いて，$t\in J$ のとき，以下の評価式を証明せよ．

$$\|Y_n(t)\|\leqq\frac{M}{n!}(\beta M|t|)^n$$

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $\mathbb{R}^{n\times n}$ denote the linear space of $n\times n$ real matrices. Consider the initial value problem for the ordinary differential equation given on $\mathbb{R}^{n\times n}$ by

$$\frac{dY}{dt} = (A + \lambda B(t))Y, \quad Y(0) = I, \tag{$*$}$$

where A, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ are, respectively, a constant matrix and a continuous function defined on an interval (a, b) including $t = 0$, and where λ is a real parameter, and I is the identity. As is well-known, the solution to the equation $(*)$ with $\lambda = 0$,

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X(0) = I,$$

is given by $X(t) = e^{tA}$. Answer each of the following questions.

(i) On assuming that a solution to $(*)$ takes the form $Y(t) = e^{tA}W(t)$, find an differential equation for $W(t)$, and thereby obtain an integral equation that $Y(t)$ should be subject to.

(ii) Denote by $Y(t;\lambda)$ a solution to the integral equation found in (i). Given the fact that $Y(t;\lambda)$ is differentiable with respect to λ, show that

$$\left.\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}Y(t;\lambda)\right|_{\lambda=0} = n!Y_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

where $Y_n(t)$'s are defined as follows:

$$Y_0(t) = e^{tA},$$

$$Y_n(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)Y_{n-1}(s)ds, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{$**$}$$

(iii) Let J denote an arbitrary closed sub-interval of (a, b) such that $0 \in J$, and M and β be constants determined, respectively, by

$$M := \max_{t\in J}\|e^{tA}\|, \quad \beta := \max_{t\in J}\|B(t)\|,$$

where $\|\cdot\|$ denotes a matrix norm. By using $(**)$, show that

$$\|Y_n(t)\| \leqq \frac{M}{n!}(\beta M|t|)^n \quad \text{for} \quad t \in J.$$

確率・統計論

$\boxed{7}$

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ は，標本空間 Ω, σ 加法族 $\mathfrak{F}$, 確率測度 P からなる確率空間とする．Ω 上の確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ があるとする．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) \geqq 0$ をみたす Borel 可測関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考える．正の実数 t に対して，$U_t := \{\omega \in \Omega \,|\, f(X(\omega)) \geqq t\}$ とおけば，$U_t \in \mathfrak{F}$ であり，

$$P(U_t) = P(f(X) \geqq t) = \int_{U_t} P(d\omega)$$

は $f(X) \geqq t$ となる確率を与える．また，

$$E(f(X)) = \int_{\Omega} f(X(\omega))P(d\omega)$$

が有限値ならば，これは $f(X)$ の期待値を定める．以下の問いに答えよ．

(i) 次の関係式が成り立つことを証明せよ．

$$P(U_t) \ \leqq \ \frac{E(f(X))}{t}$$

(ii) X の期待値 $m := E(X)$ が存在するとする．X の期待値の周りの n 次のモーメントを

$$\mu_n := E((X-m)^n) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定義する．このとき任意の正の実数 k と任意の正の整数 n に対して

$$P\Big(|X - m| \geqq k(\mu_{2n})^{\frac{1}{2n}}\Big) \ \leqq \ \frac{1}{k^{2n}}$$

が成り立つことを示せ．

(iii) X は確率密度関数

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

を持つ確率変数とする．ここで α は正の実数である．X の期待値 m と，m の周りの 2 次のモーメント μ_2 を求めよ．

(iv) $k > 1$ をみたす実数 k に対して，(iii) で与えた確率密度関数について

$$P\Big(|X - m| \geqq k\sqrt{\mu_2}\Big)$$

を求めよ．

Probability and Statistics

$\boxed{7}$

Let $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ be a probability space, which consists of the sample space Ω, the σ-field $\mathfrak{F}$, and the probability measure P. Let $X : \Omega \to \mathbb{R}$ be a random variable. Assume that a Borel measurable function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $f(x) \geqq 0$ for arbitrary $x \in \mathbb{R}$. For a positive real number t, put $U_t := \{\omega \in \Omega \,|\, f(X(\omega)) \geqq t\}$. Then $U_t \in \mathfrak{F}$. The probability for $f(X) \geqq t$ is given by

$$P(U_t) = P(f(X) \geqq t) = \int_{U_t} P(d\omega).$$

The expectation value of $f(X)$ is defined to be

$$E(f(X)) = \int_{\Omega} f(X(\omega))P(d\omega),$$

if the integral converges. Answer each of the following questions.

(i) Prove the inequality

$$P(U_t) \leqq \frac{E(f(X))}{t}.$$

(ii) Assume that the expectation value of X, $m := E(X)$, exists. Define the n-th moment of X about m to be

$$\mu_n := E((X-m)^n) \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Prove that

$$P\Big(|X-m| \geqq k(\mu_{2n})^{\frac{1}{2n}}\Big) \leqq \frac{1}{k^{2n}}$$

for an arbitrary positive real number k and an arbitrary positive integer n.

(iii) Let X be a random variable with the probability density function

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$

where α is a positive real number. Compute the expectation value m of X and the second moment μ_2 about m.

(iv) Evaluate

$$P\Big(|X-m| \geqq k\sqrt{\mu_2}\Big)$$

for a real number $k > 1$ with the probability density function given in (iii).