基礎数学 II

6

$\mathbb{R}^N$ の $n(< N)$ 次元線形部分空間を V_n とし，V_n 上の一次独立なベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とする．さらに，$\boldsymbol{x}$ を $\mathbb{R}^N$ 上の点とし，$\boldsymbol{x}$ と V_n との距離を

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_n) := \inf_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n} ||\boldsymbol{x} - \alpha_1\boldsymbol{v}_1 - \alpha_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \alpha_n\boldsymbol{v}_n||$$

で表す．ただし，$||\boldsymbol{f}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}\rangle}$ で $\boldsymbol{f}$ のノルム，$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle$ で $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{g}$ の内積をそれぞれ表す．また，グラム行列式を

$$G(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n) = \det\big(\langle \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j\rangle\big)_{1\leqq i,j\leqq n}$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)$ をみたす V_n 上の点 $\boldsymbol{y}$ が存在することを示せ．

(ii) $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)$ を実現する V_n 上の点を $\boldsymbol{y}$ とする．このとき，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ は V_n 上の任意のベクトルと直交すること, すなわち

$$\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}\rangle = 0, \quad {}^\forall \boldsymbol{w} \in V_n$$

を示せ．

(iii) 次式の成り立つことを示せ．

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)^2 = \frac{G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{x})}{G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)}$$

ここで, $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ が一次独立ならば, $G(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k) \neq 0$ であることは用いてよい．

(iv) $G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) > 0$ を示せ．

(v) $V_m \subset V_n$ $(0 \leqq m < n)$ のとき,

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_n) \leqq \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, V_m)$$

を示すことにより,

$$G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \leqq G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1})\, G(\boldsymbol{v}_n)$$

を証明せよ．

Basic Mathematics II

6

Let V_n be an n-dimensional linear subspace of $\mathbb{R}^N$ with $n < N$, and let $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ be linearly independent vectors of V_n. For a given point $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^N$, the distance between $\boldsymbol{x}$ and V_n is defined to be

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_n) := \inf_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n} ||\boldsymbol{x} - \alpha_1\boldsymbol{v}_1 - \alpha_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \alpha_n\boldsymbol{v}_n||,$$

where $||\boldsymbol{f}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}\rangle}$. Denote by $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle$ the inner product of $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{g}$, and define Gram's determinant by

$$G(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n) := \det\big(\langle \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j\rangle\big)_{1\leqq i,j\leqq n}.$$

Answer each of the following questions.

(i) Show that there exists a point $\boldsymbol{y}$ in V_n such that $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)$.

(ii) Let $\boldsymbol{y}$ denote a point which realizes $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)$. Show that $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ is orthogonal to any vector of V_n, *i.e.*,

$$\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}\rangle = 0, \quad {}^\forall \boldsymbol{w} \in V_n.$$

(iii) Show that

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_n)^2 = \frac{G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{x})}{G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)}.$$

It is well known that if $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ are linearly independent vectors, then Gram's determinant can never vanish, $G(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k) \neq 0$.

(iv) Show that $G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) > 0$.

(v) Show that, if $V_m \subset V_n$ $(0 \leqq m < n)$, then

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_n) \leqq \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, V_m)$$

and thereby prove that

$$G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \leqq G(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1})G(\boldsymbol{v}_n).$$