現代制御論

4

線形状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

で与えられるシステムを考える．ただし $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}^q$ は入力，$y(t) \in \mathbb{R}^p$ は出力を表す．係数行列は $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ である．このシステムが可制御であることを (A, B) が可制御という．同様にこのシステムが可観測であることを (C, A) が可観測という．(A, B) が可制御であるためには，行列

$$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

が行最大階数をもつことが必要十分であることは既知であるとせよ．伝達関数 $H(s)$ に対して (1) $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$, (2) (A, B) は可制御, (3) (C, A) は可観測，を満たす行列の組 (A, B, C) を最小実現とよぶ．ただし I は単位行列である．このとき以下の問いに答えよ．

(i) (A, B) が可制御であるためには，任意の $\lambda \in \sigma(A)$ に対して行列

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix}$$

が行最大階数をもつことが必要十分であることを証明せよ．ただし $\sigma(A)$ は行列 A の固有値の集合を表す．

(ii) 行列 A, B がブロック構造

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

をもつとする．ただし $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times q}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times q}$, $n = n_1 + n_2$ である．ここで $\sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset$ と仮定する．このとき (A, B) が可制御であるためには，(A_1, B_1) が可制御かつ (A_2, B_2) が可制御であることが必要十分であることを証明せよ．

(iii) 伝達関数

$$H(s) = \frac{R}{s - \lambda}, \quad R \in \mathbb{R}^{p\times q}, \ \operatorname{rank} R = n$$

を考える．ここで $R = CB$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$ と分解する．そして $A = \lambda I$ とおく．このとき行列の組 (A, B, C) は $H(s)$ の最小実現であることを証明せよ．

(iv) 伝達関数

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{5s-7}{s^2-3s+2} & \dfrac{5s-9}{s^2-3s+2} \\ \dfrac{2s-3}{s^2-3s+2} & \dfrac{5s-7}{s^2-3s+2} \end{bmatrix}$$

の最小実現を一つ求めよ．

Modern Control Theory

4

Consider the linear state equation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the system state, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ is the system input, and $y(t) \in \mathbb{R}^p$ is the system output. The matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$, and $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ are constant matrices. If the system is controllable, we say (A, B) is controllable. If the system is observable, we say (C, A) is observable. We shall use the fact that (A, B) is controllable if and only if the matrix

$$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

is of full row rank. Let I be the identity matrix. We say that a matrix triple (A, B, C) is a minimal realization of a transfer function $H(s)$ if (1) $H(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B$, (2) (A, B) is controllable, and (3) (C, A) is observable. Answer the following questions.

(i) Prove that (A, B) is controllable if and only if the matrix

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix}$$

is of full row rank for any $\lambda \in \sigma(A)$, where $\sigma(A)$ is the set of eigenvalues of A.

(ii) Suppose that the matrices A and B have the following block structure:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

where $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times q}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times q}$, and $n = n_1 + n_2$. Assume that $\sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset$. Prove that (A, B) is controllable if and only if (A_1, B_1) and (A_2, B_2) are both controllable.

(iii) Given a system described by the transfer function

$$H(s) = \frac{R}{s - \lambda}, \quad R \in \mathbb{R}^{p\times q}, \quad \operatorname{rank} R = n,$$

write R as $R = CB$, where $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, and $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$. Let $A = \lambda I$. Prove that (A, B, C) is a minimal realization of $H(s)$.

(iv) Find a minimal realization of the transfer function

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{5s - 7}{s^2 - 3s + 2} & \dfrac{5s - 9}{s^2 - 3s + 2} \\[2ex] \dfrac{2s - 3}{s^2 - 3s + 2} & \dfrac{5s - 7}{s^2 - 3s + 2} \end{bmatrix}.$$