基礎数学 I

$\boxed{1}$

n がすべての自然数 $\mathbb{N}$ の上を動くとき，$\dfrac{1}{n}$ の和 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}$ は $+\infty$ に発散し，$\dfrac{1}{n^2}$ の和 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^2}$ はある正の値に収束する．p がすべての素数 $\mathbb{P}$ の上を動くとき，$\dfrac{1}{p}$ の和と $1+\dfrac{1}{p}$ の積を，それぞれ，

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots,\quad \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\cdots,\quad p_1,p_2,\cdots\in\mathbb{P}$$

とかく．自然数 n は適当な非負整数 $k_1,k_2,\cdots\in\{0,1,2,\ldots\}$ を用いて

$$n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdots$$

と一意に素因数分解できることに注意する．L を 2 以上の自然数とするとき，L 以下の素数のなす有限部分集合を $\mathbb{P}_L$ とかく．以下の問いに答えよ．

(i) 不等式

$$\log\prod_{p\in\mathbb{P}_L}\left(1+\frac{1}{p}\right)<\sum_{p\in\mathbb{P}_L}\frac{1}{p}$$

を示せ．

(ii) $\displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right)$ は $+\infty$ に発散することを示せ．

(iii) $\displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}$ はある正の値に収束することを示せ．

(iv) $\displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1+\frac{1}{p}\right)$ の収束，発散について理由をつけて答えよ．

(v) $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}$ の収束，発散について理由をつけて答えよ．

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

When n runs over the set $\mathbb{N}$ of all natural numbers, the sum $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ diverges to $+\infty$ and the sum $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ converges to a positive constant. Let

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots, \quad \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1+\frac{1}{p}\right) = \left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\cdots, \quad p_1, p_2, \cdots \in \mathbb{P}$$

be the sum of $\frac{1}{p}$ and the product of $1+\frac{1}{p}$, respectively, when p runs over the set $\mathbb{P}$ of all prime numbers. Note that any natural number n admits a unique prime factor decomposition

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdots$$

in terms of suitable nonnegative integers $k_1, k_2, \cdots \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Let L be a natural number greater than or equal to 2. Let $\mathbb{P}_L$ be the finite set of prime numbers less than or equal to the natural number L. Answer the following questions.

(i) Show the inequality

$$\log \prod_{p\in\mathbb{P}_L} \left(1+\frac{1}{p}\right) < \sum_{p\in\mathbb{P}_L} \frac{1}{p}.$$

(ii) Show that $\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right)$ diverges to $+\infty$.

(iii) Show that $\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}$ converges to a positive constant.

(iv) Determine whether the product $\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1+\frac{1}{p}\right)$ converges or not, giving reason for the answer.

(v) Determine whether the sum $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ converges or not, giving reason for the answer.

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

配列 A に n 個の整数が貯えられている．x を一つの整数とする．以下の問いに答えよ．

(i) A の要素を $A[1] \leqq A[2] \leqq \cdots \leqq A[n]$ となるように整列するヒープソート (Heap Sort) を与えよ．それの最悪計算時間を示し，理由も述べよ．

(ii) x が A の二つの要素の和で書けるかどうかを $O(n \log n)$ 時間で判定するアルゴリズムを示せ．

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Given an array A of n integers and another integer x, answer the following questions.

(i) Show a Heap Sort algorithm that sorts the elements in A in such a way that $A[1] \leqq A[2] \leqq \cdots \leqq A[n]$ after sorting. Evaluate its worst-case running time.

(ii) Show an $O(n \log n)$ algorithm that determines whether or not there exist two elements in A whose sum is exactly x.

線形計画

$\boxed{3}$

つぎの最適化問題を考える.

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}): & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \end{array}$$

ただし, $\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトル, $\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル, $^\top$ は転置記号, $\boldsymbol{X}$ は次式で与えられる $\mathbb{R}^n$ の部分集合である.

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{a}_i s_i + \sum_{j=1}^{q} \boldsymbol{b}_j t_j, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} s_i = 1,\ s_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, p),\ t_j \geqq 0\ (j = 1, \ldots, q) \end{array} \right\}$$

ここで, p と q は正整数, $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ と $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ は n 次元定数ベクトルである. $\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0}$ $(i = 1, \ldots, p)$, $\boldsymbol{b}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, \ldots, q)$, $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ とする.

以下の問いに答えよ.

(i) $\boldsymbol{X}$ は凸集合であることを示せ.

(ii) 問題 (P) が有界 でない (すなわち $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^k = -\infty$ となるような点列 $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset \boldsymbol{X}$ が存在する) ための必要十分条件は, ある $j \in \{1, \ldots, q\}$ に対して $\boldsymbol{b}_j^\top \boldsymbol{c} < 0$ が成り立つことである. このことを証明せよ.

(iii) すべての $j \in \{1, \ldots, q\}$ に対して $\boldsymbol{b}_j^\top \boldsymbol{c} \geqq 0$ が成り立つとし, 問題 (P) の最適解の集合を $\boldsymbol{S}$ と表記する. 集合 $\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$, $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$, $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ. さらに, 集合 $\boldsymbol{S}$ が有界である (すなわち $\lim_{k\to\infty} ||\boldsymbol{x}^k|| = \infty$ となるような点列 $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset \boldsymbol{S}$ が存在しない) ための必要十分条件を書け. [証明は不要]

Linear Programming

$\boxed{3}$

Consider the following optimization problem:

$$\text{(P)}: \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \end{array}$$

where $\boldsymbol{x}$ is an n-dimensional vector of variables, $\boldsymbol{c}$ is an n-dimensional constant vector, $^\top$ denotes transposition, and $\boldsymbol{X}$ is the set given by

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{a}_i s_i + \sum_{j=1}^{q} \boldsymbol{b}_j t_j, \\ \sum_{i=1}^{p} s_i = 1, \; s_i \geqq 0 \; (i = 1, \ldots, p), \; t_j \geqq 0 \; (j = 1, \ldots, q) \end{array} \right\}.$$

Here, p and q are positive integers, $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ and $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ are n-dimensional constant vectors. We assume that $\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0}$ $(i = 1, \ldots, p)$, $\boldsymbol{b}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, \ldots, q)$, and $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$.

Answer the following questions.

(i) Show that $\boldsymbol{X}$ is a convex set.

(ii) Show that problem (P) is unbounded (that is, there exists a sequence $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset \boldsymbol{X}$ such that $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^k = -\infty$) if and only if $\boldsymbol{b}_j^\top \boldsymbol{c} < 0$ for some $j \in \{1, \ldots, q\}$.

(iii) Assume that $\boldsymbol{b}_j^\top \boldsymbol{c} \geqq 0$ for all $j \in \{1, \ldots, q\}$, and let $\boldsymbol{S}$ denote the set of optimal solutions of problem (P). Give an explicit expression of the set $\boldsymbol{S}$ in terms of $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$, $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$, and $\boldsymbol{c}$. Moreover, write a necessary and sufficient condition under which the set $\boldsymbol{S}$ is bounded (that is, there does not exist a sequence $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset \boldsymbol{S}$ such that $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^k\| = \infty$). [Proof is not necessary.]

線形制御理論

$\boxed{4}$

図1で示す筒型の撹拌タンクを考える．左の管からは，定数濃度 c_1 [mol/m^3] の溶液が流量 q_1 [m^3/sec] で，右の管からは，定数濃度 c_2 [mol/m^3] の溶液が流量 q_2 [m^3/sec] で，それぞれタンクに流れ込んで，瞬時に撹拌され，一様な濃度 c [mol/m^3] をもつものとする．筒型タンクの底面積は A [m^2] であり，流出口の断面積は S [m^2] とする．流出口での流量 f [m^3/sec] はトリチェリの定理に従っており，$f = S\sqrt{2gh}$ を満たすものとする．ただし h [m] は液面位，g [m/sec^2] は重力加速度である．

流量を一定値 $q_1 = q_{1,0}$，$q_2 = q_{2,0}$ とするとき，液面位は $h = h_0$，タンク内濃度は $c = c_0$ で平衡状態にあるものとする．各定数は表1の値をとるものとして，以下の問いに答えよ．

(i) 平衡液面位 h_0 と平衡濃度 c_0 を求めよ．

(ii) 流量が $q_1 = q_{1,0} + u$，$q_2 = q_{2,0} + v$ と変化したとき，液面位が $h = h_0 + x$，濃度が $c = c_0 + y$ と変化するものとする．(i) で求めた平衡状態周りの線形近似モデルを考えるとき，u から x，u から y，v から x，および v から y への伝達関数をそれぞれ求めよ．

(iii) (ii) の線形近似モデルに対して，$u = -k_1 x, v = -k_2 y$ と線形フィードバック則を与えるとき，閉ループ系を安定にするゲイン (k_1, k_2) の集合を求めよ．

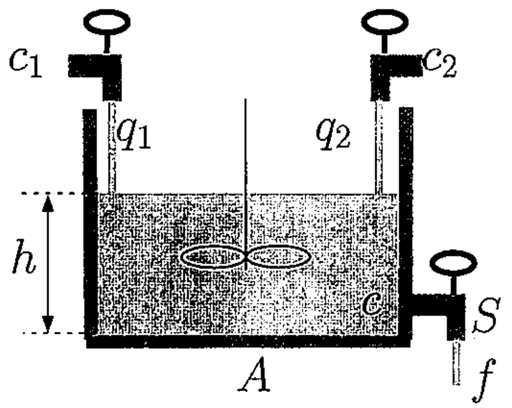

図1: 撹拌タンク

表1: 各定数の値

g	9.8
c_1	100
c_2	800
S	0.01
A	2
$q_{1,0}$	0.05
$q_{2,0}$	0.02

Linear Control Theory

4

Fig. 1 shows a stirred tank. The tank is fed with two incoming flows with time-varying flow rates q_1 [m^3/sec] and q_2 [m^3/sec]. Both feeds contain dissolved material with constant concentrations c_1 and c_2. Assume that the material is stirred instantaneously and the time-varying concentration c [mol/m^3] of the solution in the tank is uniform. The cylinder-shaped tank has constant cross-sectional area A [m^2]. Assume further that the outgoing flow f [m^3/sec] obeys the Torricelli's theorem, namely, $f = S\sqrt{2gh}$, where S [m^2] is the cross-sectional area of the flow, g [m/sec^2] is the gravitational acceleration, and h [m] is the height of the liquid.

Let $h = h_0$ and $c = c_0$ be the height and concentration of the solution in equilibrium when the incoming flows $q_1 = q_{1,0}$ and $q_2 = q_{2,0}$ are constant. The values of the constants are given in Table 1. Answer the following questions.

(i) Calculate the height and the concentration of the solution in equilibrium.

(ii) When the constant incoming flows $q_{1,0}$ and $q_{2,0}$ are perturbed by u and v, *i.e.*, $q_1 = q_{1,0} + u$ and $q_2 = q_{2,0} + v$, the height and the concentration of the solution become $h = h_0 + x$ and $c = c_0 + y$, respectively. Consider the approximated linear model around the equilibrium point calculated in (i). Derive the transfer functions from u to x, u to y, v to x, and v to y.

(iii) Determine the set of stabilizing gains (k_1, k_2) when the linear feedback control law $u = -k_1 x$ and $v = -k_2 y$ is applied to the approximated linear model derived in (ii).

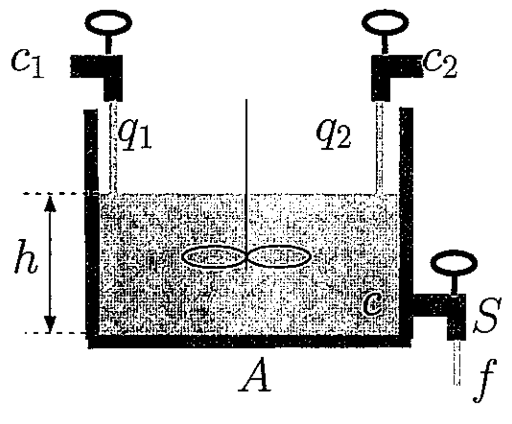

Fig.1: Stirred tank

Table 1: Constants

g	9.8
c_1	100
c_2	800
S	0.01
A	2
$q_{1,0}$	0.05
$q_{2,0}$	0.02

基礎力学

5

図に示すように，水平面内に固定された円にそってなめらかに運動する質量 m の３個の質点を考える．３個の質点は互いに同じばね定数 k のばねで結ばれている．平衡状態では，ばねは自然な長さになっているとする．この系の基準振動数と基準モードを求めよ．

Basic Mechanics

5

As shown in the figure, three particles, each of mass m, smoothly move along the circle fixed in a horizontal plane. The particles are interconnected by three identical springs of force constant k. The length of each spring is the natural one in the equilibrium configuration of the system. Find the normal frequencies and modes of the system.

基礎数学 II

$\boxed{6}$

n 次正方行列 A に対して適当な可逆行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき，A は P により対角化可能という．A の固有値がすべて相異なるとき，A は対角化可能である．n 次正方行列 A, B が同一の P により対角化可能であるとき，A, B は同時対角化可能という．以下の問いに答えよ．ただし，以下に現れる行列は複素行列，ベクトルは複素ベクトルとする．

(i) n 次正方行列 A，B が同時対角化可能ならば，$AB = BA$ が成り立つことを示せ．

(ii) n 次正方行列 A の固有値がすべて相異なり，かつ，n 次正方行列 B との間に $AB = BA$ が成り立つとき，A，B は同時対角化可能であることを示せ．

(iii) A, B を n 次正方行列とする．行列 A のある固有値 α に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}\ (\neq \mathbf{0})$ とおく．ある正の整数 $p\ (\leqq n)$ について，$B^k\boldsymbol{x}\ (k = 0, 1, \ldots, p-1)$ は一次独立であるが，$B^k\boldsymbol{x}\ (k = 0, 1, \ldots, p)$ は一次従属であるとし，線形部分空間

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{x}, \ldots, B^{p-1}\boldsymbol{x}\} \\ &= \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x} + c_2B\boldsymbol{x} + \cdots + c_pB^{p-1}\boldsymbol{x}, {}^\forall c_j \in \mathbb{C}\}\end{aligned}$$

を導入する．n 次正方行列 A，B が $AB = BA$ を満たすとき，$\mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$ は写像 B のもとでの不変部分空間となること，および，A，B は共通の固有ベクトル $\boldsymbol{z}\ (\neq \mathbf{0}) \in \mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$ をもつことを示せ．

(iv) n 次正方行列 A，B が共通の固有ベクトル $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$ をもつとき，$\boldsymbol{z}$ に対応する A の固有値を α，B の固有値を β とする．このとき，和 $\alpha + \beta$ は行列 $A + B$ の固有ベクトル $\boldsymbol{z}$ に対応する固有値を与え，積 $\alpha\beta$ は行列 AB の固有ベクトル $\boldsymbol{z}$ に対応する固有値を与えることを示せ．

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

An $n \times n$ matrix A is called diagonalizable if there is an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. When all the eigenvalues of A are different to each other, then A is known to be diagonalizable. Two $n \times n$ matrices A and B are called simultaneously diagonalizable if there is a common invertible matrix P such that both $P^{-1}AP$ and $P^{-1}BP$ are diagonal. Answer the following questions, where all the matrices and vectors are comlex.

(i) Show that $AB = BA$ if $n \times n$ matrices A and B are simultaneously diagonalizable.

(ii) Show that two $n \times n$ matrices A and B are simultaneously diagonalizable if all the eigenvalues of A are different to each other and $AB = BA$.

(iii) Let A and B be $n \times n$ matrices. Let $\boldsymbol{x}$ $(\neq \mathbf{0})$ be an eigenvector corresponding to an eigenvalue α of A. Suppose that the vectors $B^k\boldsymbol{x}$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$ are linearly independent and the vectors $B^k\boldsymbol{x}$ $(k = 0, 1, \ldots, p)$ are linearly dependent for some positive interger p $(\leqq n)$. Define a linear subspace by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{x}, \ldots, B^{p-1}\boldsymbol{x}\} \\ &= \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x} + c_2B\boldsymbol{x} + \cdots + c_pB^{p-1}\boldsymbol{x}, {}^\forall c_j \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Show that $\mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$ is an invariant subspace of the mapping B and that A and B have a common eigenvector $\boldsymbol{z}$ $(\neq \mathbf{0}) \in \mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$ if $AB = BA$.

(iv) Suppose that A and B has the common eigenvector $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$. Let α and β be eigenvalues of A and B, respectively, corresponding to $\boldsymbol{z}$. Show that the sum $\alpha + \beta$ is equal to the eigenvalue of $A + B$ corresponding to the eigenvector $\boldsymbol{z}$, and the product $\alpha\beta$ is equal to the eigenvalue of AB corresponding to the eigenvector $\boldsymbol{z}$.

応用数学

1

関数 $f(z)$ を，原点を中心とする半径 R の円板 $D_R(0)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<R\}$ において正則な関数とする．また，$g(z)$ を複素数平面 $\mathbb{C}$ 上で正則な関数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) 円板 $D_R(0)$ 上で $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ならば，

$$|c_n| \leqq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|d\theta \qquad (0<r<R)$$

の成り立つことを証明せよ．

(ii) 円板 $D_R(0)$ 上で $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ならば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \qquad (0<r<R)$$

の成り立つことを証明せよ．

(iii) $|f(z)|$ が円板 $D_R(0)$ 上で最大値をとるならば，$f(z)$ は定数関数となることを証明せよ．

(iv) 式 (1) をみたす正の整数 n と正の定数 M, R が存在するならば，関数 $g(z)$ は n 次以下の多項式となることを示せ．

$$|g(z)| \leqq M|z|^n \qquad (|z| \geqq R) \tag{1}$$

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

Let $f(z)$ be a holomorphic function on the open disk with the center at the origin and of radius R: $D_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$. Let $g(z)$ be a holomorphic function on $\mathbb{C}$. Answer each of the following questions.

(i) Prove that if $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ on $D_R(0)$ then

$$|c_n| \leqq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta$$

for $0 < r < R$.

(ii) Prove that if $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ on $D_R(0)$ then

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

for $0 < r < R$.

(iii) Prove that if $|f(z)|$ takes a maximum value on $D_R(0)$ then $f(z)$ must be a constant function.

(iv) Suppose that there exist some positive integer n and constants $M > 0$ and $R > 0$ such that

$$|g(z)| \leqq M|z|^n$$

for all z with $|z| \geqq R$. Then show that $g(z)$ is a polynomial in z of degree less than or equal to n.

グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る有向グラフとし，$N=[G,\mathrm{cap}]$ を G の各枝 $e\in E$ に実数値の容量 $\mathrm{cap}(e)>0$ を与えて得られるネットワークとする．節点集合 X に始点を持ち，節点集合 Y に終点をもつ枝の集合を $E(X,Y)$ と書き，節点 v を始点とする枝の集合を $E^+(v)$，節点 v を終点とする枝の集合を $E^-(v)$ と書く．非負実数の集合を $\mathbb{R}_+$ で表す．指定された 2 点 $s,t\in V$ に対し，流量保存則 $\sum_{e\in E^+(v)} f(e)-\sum_{e\in E^-(v)} f(e)=0$, $\forall v\in V-\{s,t\}$ および容量制約 $f(e)\leqq \mathrm{cap}(e), \forall e\in E$ を満たす関数 $f:E\to\mathbb{R}_+$ を (s,t) フローと呼び，その流量 $\mathrm{val}(f)$ を $\sum_{e\in E^+(s)} f(e)-\sum_{e\in E^-(s)} f(e)$ で定める．以下の問いに答えよ．

(i) $s\in S, t\in T$ を満たす任意の節点集合 V の分割 $S, T=V-S$ に対して，$\mathrm{cap}(S,T)=\sum_{e\in E(S,T)}\mathrm{cap}(e)$ と定めるとき，任意の (s,t) フロー f に対して，$\mathrm{val}(f)\leqq \mathrm{cap}(S,T)$ が成り立つことを証明せよ．

(ii) 与えられた (s,t) フロー f に対して定められる残余ネットワーク $N_f=[G_f=(V,E_f),\mathrm{cap}_f]$ の作り方を示せ．

(iii) 残余ネットワーク N_f において，s から t への有向路が存在するとき，そのひとつを P とする．P 上の枝の N_f における容量の最小値を Δ とするとき，N には流量が $\mathrm{val}(f)+\Delta$ である (s,t) フローが存在することを証明せよ．

(iv) 残余ネットワーク N_f が s から t への有向路をもたないとき，N_f において s から到達可能な節点の集合を S とし，$T=V-S$ とする．このとき各枝 $e\in E(S,T)\cup E(T,S)$ に対して，$\mathrm{cap}(e)$, $f(e)$ が満たす性質について述べよ．

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a directed graph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, \mathrm{cap}]$ denote a network on G obtained by assigning a real value $\mathrm{cap}(e) > 0$ to each edge $e \in E$ as its capacity. For two subsets $X, Y \subseteq V$, let $E(X, Y)$ denote the set of edges which leave a vertex in X and enter a vertex in Y. For a vertex v, let $E^+(v)$ denote the set of edges leaving v, and $E^-(v)$ denote the set of edges entering v. Let $\mathbb{R}_+$ be the set of nonnegative reals. For two designated vertices $s, t \in V$, an (s,t)-flow is defined to be a mapping $f : E \to \mathbb{R}_+$ which satisfies $\sum_{e \in E^+(v)} f(e) - \sum_{e \in E^-(v)} f(e) = 0$, $\forall v \in V - \{s, t\}$ (flow conservation law) and $f(e) \leqq \mathrm{cap}(e)$, $\forall e \in E$ (capacity constraint), and its flow value $\mathrm{val}(f)$ is defined to be $\sum_{e \in E^+(s)} f(e) - \sum_{e \in E^-(s)} f(e)$. Answer the following questions.

(i) For a partition $S, T = V - S$ of V such that $s \in S$ and $t \in T$, define $\mathrm{cap}(S,T) = \sum_{e \in E(S,T)} \mathrm{cap}(e)$. Prove that $\mathrm{val}(f) \leqq \mathrm{cap}(S,T)$ holds for any (s,t)-flow f.

(ii) For a given (s,t)-flow f, show how to construct its residual network $N_f = [G_f = (V, E_f), \mathrm{cap}_f]$.

(iii) For an (s,t)-flow f in N, assume that there is a directed path P from s to t in the residual network N_f. Let Δ be the minimum cap_f of an edge in P. Prove that N has an (s,t)-flow whose flow value is $\mathrm{val}(f) + \Delta$.

(iv) For an (s,t)-flow f in N, assume that there is no directed path from s to t in the residual network N_f. Let S be the set of vertices which are reachable from s in N_f, and $T = V - S$. Describe what property holds for $\mathrm{cap}(e)$ and $f(e)$, $e \in E(S,T) \cup E(T,S)$.

オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

つぎの凸２次計画問題を考える.

$$\mathrm{P}: \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b \end{array}$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ 正定値対称行列，$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{0}$ でない n 次元ベクトル，b はスカラーであり，$^\top$ はベクトルの転置を表す．この問題は唯一の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ をもつ.

$\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqq 0\}$ とする．パラメータ $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\rho \in \mathbb{R}_+$ を含むつぎの制約なし最小化問題を考える.

$$\mathrm{P}(\lambda, \rho): \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \lambda\left(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b\right)^2 \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\rho \in \mathbb{R}_+$ に対して問題 $\mathrm{P}(\lambda, \rho)$ は唯一の最適解 $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ をもつ.

以下の問いに答えよ.

(i) 問題 P のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を用いて $\boldsymbol{x}^*$ を求めよ.

(ii) $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ を求めよ.

(iii) パラメータ $\lambda^* \in \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \lambda^* \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を満たすとする．このとき任意の $\rho \in \mathbb{R}_+$ に対して $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda^*, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ となることを示せ.

(iv) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\rho \in \mathbb{R}_+$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \geqq \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)^\top \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) + \lambda\left(\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right)^2$$

(v) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，$\lim_{\rho \to \infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ は存在することが知られている.

パラメータ λ の値に関わらず，$\lim_{\rho \to \infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ となることを示せ.

Operations Research

$\boxed{3}$

Consider the following convex quadratic programming problem:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b, \end{array}$$

where $\boldsymbol{A}$ is an $n \times n$ symmetric positive definite matrix, $\boldsymbol{a}$ is an n-dimensional nonzero vector, b is a scalar, and the superscript $^\top$ denotes transposition of a vector. This problem has a unique optimal solution $\boldsymbol{x}^*$.

Let $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqq 0\}$. Consider the following unconstrained minimization problem with parameters $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\rho \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\lambda, \rho): & \text{Minimize} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \lambda\left(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b\right)^2 \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

For each $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\rho \in \mathbb{R}_+$, Problem $\mathrm{P}(\lambda, \rho)$ has a unique optimal solution $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$.

Answer the following questions.

(i) Obtain $\boldsymbol{x}^*$ by using Karush-Kuhn-Tucker conditions for Problem P.

(ii) Obtain $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$.

(iii) Suppose that a parameter $\lambda^* \in \mathbb{R}$ satisfies $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \lambda^* \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Show that $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda^*, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ for all $\rho \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Show that the following inequality holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\rho \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \geqq \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)^\top \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) + \lambda\left(\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right)^2.$$

(v) It is known that $\lim_{\rho\to\infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ exists for any $\lambda \in \mathbb{R}$. Show that $\lim_{\rho\to\infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ for any $\lambda \in \mathbb{R}$.

現代制御論

$\boxed{4}$

図 1 および図 2 のブロック線図で表される線形システムを考える．これらの図において u と y はそれぞれシステムの入力と出力である．また，$\dfrac{1}{s}$ は積分器であり，各積分器の出力を $z_i,\ i = 1, 2, 3$ とする．

(i) 図 1 の線形システムについて，以下の問いに答えよ．

(a) このシステムの状態空間モデルを導出せよ．

(b) 閉ループシステムのすべての極を -1 に配置する状態フィードバック制御則を設計せよ．

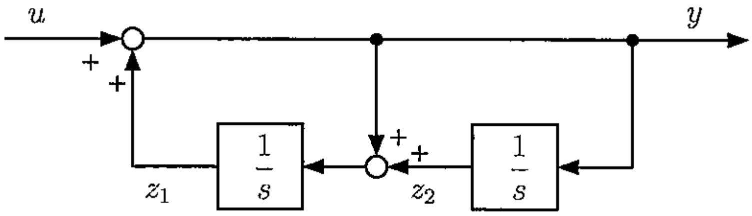

図 1

(ii) 図 2 の線形システムについて，以下の問いに答えよ．ただし，a_1, a_2 および a_3 は実定数である．

(a) このシステムの状態空間モデルを導出せよ．

(b) このシステムが可制御となる $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の範囲を求めよ．

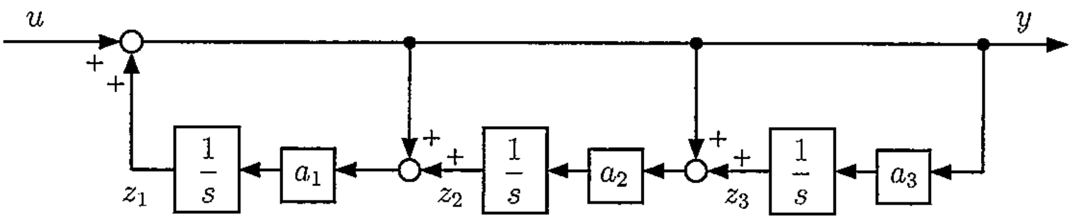

図 2

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Consider the linear systems shown in the block diagrams of Figures 1 and 2. In these figures, u and y are the input and output of the systems, respectively. Moreover, $\dfrac{1}{s}$ is an integrator, and z_i, $i = 1, 2, 3$ denote the outputs of integrators.

(i) Answer the following questions for the linear system in Figure 1.

(a) Derive a state-space model of this system.

(b) Design a state feedback control law that assigns all poles of the closed-loop system to -1.

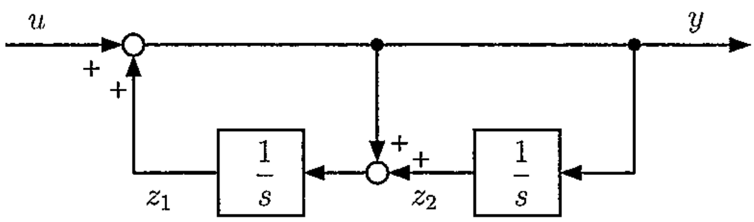

Figure 1

(ii) Answer the following questions for the linear system in Figure 2, where a_1, a_2, and a_3 are real constants.

(a) Derive a state-space model of this system.

(b) Determine the range of the triple (a_1, a_2, a_3) for which this system is controllable.

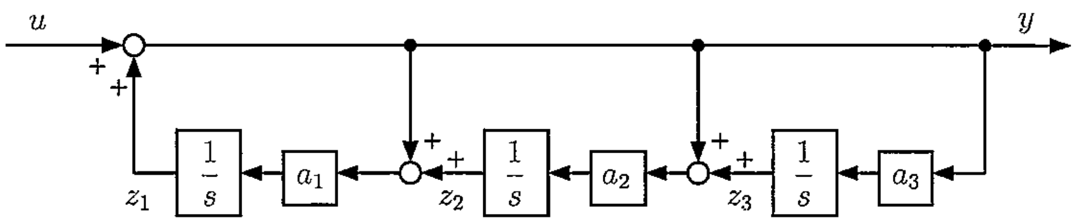

Figure 2

物理統計学

$\boxed{5}$

$W(t)$ はウィナー過程で，$W(t_0) = w_0$ の条件のもとで，$w \leqq W(t) < w + \mathrm{d}w$ $(t > t_0)$ である確率は，$\mathrm{d}w$ が十分小さいとき遷移確率

$$p(w,t|w_0,t_0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(w-w_0)^2}{2(t-t_0)}\right)$$

を用いて，$p(w,t|w_0,t_0)\mathrm{d}w$ と表される．ウィナー過程は定常マルコフ過程である．

(i) $p(w,t|w_0,t_0)$ は $t > t_1 > t_0$ のときチャップマン・コルモゴロフ方程式

$$p(w,t|w_0,t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 p(w,t|w_1,t_1)p(w_1,t_1|w_0,t_0)$$

を満足することを示せ.

(ii) n を正の整数として，$a_n(w,\tau)$ を

$$a_n(w,\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 (w_1 - w)^n p(w_1, t_0 + \tau|w, t_0)$$

で定義する．$A_n(w) := \lim_{\tau \to 0} \dfrac{a_n(w,\tau)}{\tau}$ を計算し，フォッカー・プランク方程式を導け.

(iii) $p(w,t|w_0,t_0)$ が (ii) で求めたフォッカー・プランク方程式を満足することを確かめよ.

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Let $W(t)$ be a Wiener process. The probability that $W(t)$ satisfies $w \leqq W(t) < w + \mathrm{d}w$ for $t > t_0$ with an initial condition $W(t_0) = w_0$ when $\mathrm{d}w$ is sufficiently small is $p(w, t|w_0, t_0)\mathrm{d}w$, where $p(w, t|w_0, t_0)$ denotes the transition probability

$$p(w, t|w_0, t_0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - t_0)}} \exp\left(-\frac{(w - w_0)^2}{2(t - t_0)}\right).$$

The Wiener process is a stationary Markov process.

(i) Show that $p(w, t|w_0, t_0)$ obeys the Chapman-Kolmogorov equation,

$$p(w, t|w_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 p(w, t|w_1, t_1) p(w_1, t_1|w_0, t_0)$$

for $t > t_1 > t_0$.

(ii) Evaluate $A_n(w) := \lim_{\tau \to 0} \frac{a_n(w, \tau)}{\tau}$, where n is a positive integer and

$$a_n(w, \tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 (w_1 - w)^n p(w_1, t_0 + \tau|w, t_0).$$

Derive the Fokker-Planck equation for the Wiener process.

(iii) Verify that $p(w, t|w_0, t_0)$ obeys the Fokker-Planck equation derived in (ii).

力学系数学

$\boxed{6}$

正方行列 A のエルミート共役を A^* で表す. $A = A^*$ をみたす行列 A をエルミート行列という. $n \times n$ エルミート行列の全体のなす線形空間を V で表す (n は 2 以上の整数). V には

$$\langle \xi, \eta \rangle = \mathrm{tr}(\xi^* \eta), \quad \xi, \eta \in V$$

により内積が定義される. J_k, $k = 1, 2, 3$, は $n \times n$ のエルミート行列で, 次の交換関係をみたすものとする.

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2$$

ここに, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位で, 正方行列 A, B の交換関係は $[A, B] = AB - BA$ で定義される. 次に, V の線形部分空間 W を

$$W = \left\{ \sum_{k=1}^{3} a_k J_k \middle| \ a_k \in \mathbb{R}, \ k = 1, 2, 3 \right\}$$

で定義する. 以下の問いに答えよ.

(i) $\xi \in V$ と $n \times n$ ユニタリー行列 U とに対し, 変換 $\xi \mapsto U \xi U^{-1}$ は V の直交変換となることを示せ.

(ii) 各 $k \in \{1, 2, 3\}$ と $\xi \in W$ とに対し, 写像 $\xi \mapsto e^{-itJ_k} \xi e^{itJ_k}$, $t \in \mathbb{R}$, が W の線形変換であることを W の基底 J_ℓ, $\ell = 1, 2, 3$ に関する行列表示の形で示せ. (t を独立変数とする行列値の関数として, $e^{-itJ_k} J_\ell e^{itJ_k}$ がみたすべき 2 階常微分方程式を導き, 適切な初期条件のもとでそれを解く.)

(iii) $A(t)$ を $n \times n$ エルミート行列に値をもつ $t \in \mathbb{R}$ の連続関数とする. $n \times n$ 行列 X に対する微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = [iA(t), X], \quad X(0) = P$$

の解 $X(t)$ は, P がエルミート行列なら $X(t)$ もエルミート行列, P がユニタリー行列なら $X(t)$ もユニタリー行列となることを示せ.

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

For a square matrix A, its Hermitian conjugate is denoted by A^*. A square matrix A satisfying $A^* = A$ is called Hermitian. For a positive integer n with $n \geqq 2$, let V denote the set of all the $n \times n$ Hermitian matrices, which is endowed with the inner product defined by

$$\langle \xi, \eta \rangle = \mathrm{tr}(\xi^* \eta), \quad \xi, \eta \in V.$$

Let J_k, $k = 1, 2, 3$, be $n \times n$ Hermitian matrices satisfying the commutation relations

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2,$$

where $i = \sqrt{-1}$ denotes the imaginary unit, and where the commutation relation between square matrices A, B is defined to be $[A, B] = AB - BA$. Further, let W be the linear subspace of V defined by

$$W = \Big\{ \sum_{k=1}^{3} a_k J_k \,\Big|\, a_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3 \Big\}.$$

Answer the following questions.

(i) For $\xi \in V$ and an $n \times n$ unitary matrix U, show that the map $\xi \mapsto U \xi U^{-1}$ is an orthogonal transformation of V.

(ii) Show that for $k \in \{1, 2, 3\}$, the transformation given by $\xi \mapsto e^{-itJ_k} \xi e^{itJ_k}$ with $t \in \mathbb{R}$ is a transformation of W by finding a matrix expression for the transformation with respect to the basis J_ℓ, $\ell = 1, 2, 3$. (Hint: A way to obtain required matrices is to derive a 2nd-order ordinary differential equation for $H(t) = e^{-itJ_k} J_\ell e^{itJ_k}$ as a matrix-valued function of t, which is to be solved with suitable initial conditions to provide another expression of $H(t)$.)

(iii) Let $A(t)$ be an $n \times n$ Hermitian matrix-valued function continuous in $t \in \mathbb{R}$. Consider the following differential equation for an $n \times n$ matrix-valued function X,

$$\frac{dX}{dt} = [iA(t), X], \quad X(0) = P.$$

Show that the solution $X(t)$ to the above initial value problem is Hermitian matrix-valued or unitary matrix-valued, depending on whether the initial matrix P is Hermitian or unitary.