基礎数学 II

$\boxed{6}$

n 次正方行列 A に対して適当な可逆行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき，A は P により対角化可能という．A の固有値がすべて相異なるとき，A は対角化可能である．n 次正方行列 A, B が同一の P により対角化可能であるとき，A, B は同時対角化可能という．以下の問いに答えよ．ただし，以下に現れる行列は複素行列，ベクトルは複素ベクトルとする．

(i) n 次正方行列 A，B が同時対角化可能ならば，$AB = BA$ が成り立つことを示せ．

(ii) n 次正方行列 A の固有値がすべて相異なり，かつ，n 次正方行列 B との間に $AB = BA$ が成り立つとき，A，B は同時対角化可能であることを示せ．

(iii) A, B を n 次正方行列とする．行列 A のある固有値 α に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}\ (\neq \boldsymbol{0})$ とおく．ある正の整数 $p\ (\leqq n)$ について，$B^k\boldsymbol{x}\ (k = 0, 1, \ldots, p-1)$ は一次独立であるが，$B^k\boldsymbol{x}\ (k = 0, 1, \ldots, p)$ は一次従属であるとし，線形部分空間

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{x}, \ldots, B^{p-1}\boldsymbol{x}\} \\ &= \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x} + c_2B\boldsymbol{x} + \cdots + c_pB^{p-1}\boldsymbol{x}, {}^{\forall}c_j \in \mathbb{C}\}\end{aligned}$$

を導入する．n 次正方行列 A，B が $AB = BA$ を満たすとき，$\mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$ は写像 B のもとでの不変部分空間となること，および，A，B は共通の固有ベクトル $\boldsymbol{z}\ (\neq \boldsymbol{0}) \in \mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$ をもつことを示せ．

(iv) n 次正方行列 A，B が共通の固有ベクトル $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$ をもつとき，$\boldsymbol{z}$ に対応する A の固有値を α，B の固有値を β とする．このとき，和 $\alpha + \beta$ は行列 $A + B$ の固有ベクトル $\boldsymbol{z}$ に対応する固有値を与え，積 $\alpha\beta$ は行列 AB の固有ベクトル $\boldsymbol{z}$ に対応する固有値を与えることを示せ．

Basic Mathematics II

6

An $n \times n$ matrix A is called diagonalizable if there is an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. When all the eigenvalues of A are different to each other, then A is known to be diagonalizable. Two $n \times n$ matrices A and B are called simultaneously diagonalizable if there is a common invertible matrix P such that both $P^{-1}AP$ and $P^{-1}BP$ are diagonal. Answer the following questions, where all the matrices and vectors are comlex.

(i) Show that $AB = BA$ if $n \times n$ matrices A and B are simultaneously diagonalizable.

(ii) Show that two $n \times n$ matrices A and B are simultaneously diagonalizable if all the eigenvalues of A are different to each other and $AB = BA$.

(iii) Let A and B be $n \times n$ matrices. Let $\boldsymbol{x}$ ($\neq \mathbf{0}$) be an eigenvector corresponding to an eigenvalue α of A. Suppose that the vectors $B^k\boldsymbol{x}$ ($k = 0, 1, \ldots, p-1$) are linearly independent and the vectors $B^k\boldsymbol{x}$ ($k = 0, 1, \ldots, p$) are linearly dependent for some positive interger p ($\leqq n$). Define a linear subspace by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{x}, \ldots, B^{p-1}\boldsymbol{x}\} \\ &= \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x} + c_2B\boldsymbol{x} + \cdots + c_pB^{p-1}\boldsymbol{x}, {}^\forall c_j \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Show that $\mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$ is an invariant subspace of the mapping B and that A and B have a common eigenvector $\boldsymbol{z}$ ($\neq \mathbf{0}$) $\in \mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$ if $AB = BA$.

(iv) Suppose that A and B has the common eigenvector $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}_B(\boldsymbol{x})$. Let α and β be eigenvalues of A and B, respectively, corresponding to $\boldsymbol{z}$. Show that the sum $\alpha + \beta$ is equal to the eigenvalue of $A + B$ corresponding to the eigenvector $\boldsymbol{z}$, and the product $\alpha\beta$ is equal to the eigenvalue of AB corresponding to the eigenvector $\boldsymbol{z}$.