

グラフ理論

2

$G = (V, E)$ を節点集合 V , 枝集合 E から成る単純有向グラフとし, $N = [G, c]$ を G の各枝 $e \in E$ に実数値の容量 $c(e) > 0$ を与えて得られるネットワークとする. 節点の部分集合 $X, Y \subseteq V$ に対し, X 内の点から Y 内の点へ向かう枝の集合を $E(X, Y)$ と記す. 非負実数の集合を \mathbb{R}_+ で表す. 指定された二点 $s, t \in V$ に対し, 流量保存則 $\sum_{e \in E(\{s\}, V - \{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V - \{s\}, \{s\})} f(e) = 0, \forall s \in V - \{s, t\}$ および容量制約 $f(e) \leq c(e), \forall e \in E$ を満たす関数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ を (s, t) フローと呼び, その流量 $\text{val}(f)$ を

$$\sum_{e \in E(\{s\}, V - \{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V - \{s\}, \{s\})} f(e)$$

で定める. また, $s \in X, t \in V - X$ なる節点の部分集合 $X \subseteq V$ を (s, t) カットと呼び, その容量 $\text{cap}(X)$ を

$$\sum_{e \in E(X, V - X)} c(e)$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

- (i) 任意の (s, t) フロー f と (s, t) カット X に対し, 等式

$$\text{val}(f) = \sum_{e \in E(X, V - X)} f(e) - \sum_{e \in E(V - X, X)} f(e)$$

が成り立つことを証明せよ.

- (ii) 与えられた (s, t) フロー f に対して定められる残余ネットワーク $N_f = [G_f = (V, E_f), c_f]$ の作り方を説明せよ.
- (iii) ある (s, t) フロー f に対し, 残余ネットワーク N_f において s から到達可能な節点の集合を S とする. $t \notin S$ のとき, S は N において容量を最小にする (s, t) カットであることを示せ.
- (iv) N において容量を最小にする任意の (s, t) カット X は, (iii) の (s, t) カット S に対して, $X \supseteq S$ を満たすことを説明せよ.

An English Translation:

Graph Theory

2

Let $G = (V, E)$ denote a simple directed graph with a vertex set V and an edge set E , and let $N = [G, c]$ denote a network obtained from G by assigning a real value $c(e) > 0$ to each edge $e \in E$ as its capacity. For vertex subsets $X, Y \subseteq V$, let $E(X, Y)$ denote the set of edges that leave a vertex in X and enter a vertex in Y . Let \mathbb{R}_+ be the set of nonnegative reals. For two designated vertices $s, t \in V$, an (s, t) -flow is defined to be a mapping $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ which satisfies $\sum_{e \in E(\{v\}, V - \{v\})} f(e) - \sum_{e \in E(V - \{v\}, \{v\})} f(e) = 0$, $\forall v \in V - \{s, t\}$ (flow conservation law) and $f(e) \leq c(e)$, $\forall e \in E$ (capacity constraint), and its flow value $\text{val}(f)$ is defined to be

$$\sum_{e \in E(\{s\}, V - \{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V - \{s\}, \{s\})} f(e).$$

An (s, t) -cut is defined to be a vertex subset $X \subseteq V$ such that $s \in X$ and $t \in V - X$, and its capacity $\text{cap}(X)$ is defined to be

$$\sum_{e \in E(X, V - X)} c(e).$$

Answer the following questions.

(i) Prove that for any (s, t) -flow f and any (s, t) -cut X

$$\text{val}(f) = \sum_{e \in E(X, V - X)} f(e) - \sum_{e \in E(V - X, X)} f(e)$$

holds.

(ii) For a given (s, t) -flow f , show how to construct its residual network $N_f = [G_f = (V, E_f), c_f]$.

(iii) For an (s, t) -flow f , let S be the set of all vertices reachable from s in the residual network N_f , and assume that $t \notin S$ holds. Prove that S is an (s, t) -cut in N that minimizes the capacity.

(iv) Prove that any (s, t) -cut X in N that minimizes the capacity satisfies $X \supseteq S$ for the (s, t) -cut S in (iii).