

応用数学

1

i を虚数単位 ($i^2 = -1$) として, 関数

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 4i}, \quad t \in \mathbb{R},$$

とそのフーリエ変換

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

を考える. また, 関数 f を g と \widehat{g} のたたみこみにより

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s) \widehat{g}(s) ds$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (i) フーリエ変換 $\widehat{g}(\xi)$ を求めよ.
- (ii) $f(t)$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ を求めよ.
- (iii) $\widehat{f}(\xi)$ は \mathbb{R} 上で C^1 級でないことを示せ.
- (iv) $f(t)$ は \mathbb{R} 上で C^∞ 級であることを示せ.

An English Translation:

Applied Mathematics

1

Consider

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 4i}, \quad t \in \mathbb{R},$$

and its Fourier transform

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

where i represents the imaginary unit ($i^2 = -1$). Define a function f as the convolution of g and \widehat{g} :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s) \widehat{g}(s) ds.$$

Answer the following questions.

- (i) Obtain the Fourier transform $\widehat{g}(\xi)$.
- (ii) Obtain the Fourier transform $\widehat{f}(\xi)$ of $f(t)$,
- (iii) Show that $\widehat{f}(\xi)$ is not of class C^1 on \mathbb{R} .
- (iv) Show that $f(t)$ is of class C^∞ on \mathbb{R} .