

## オペレーションズリサーチ

3

以下の問 (i), (ii) に答えよ.

(i)  $f: R^n \rightarrow R$  を  $f(0) = 0$  である凸関数とする. 以下の (a), (b) に答えよ.

(a) すべての  $t \geq 1$  と  $x \in R^n$  に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$f(tx) \geq tf(x)$$

(b) すべての  $x \in R^n$  に対して  $f(x) \leq M$  となる定数  $M$  が存在するとき, すべての  $x \in R^n$  に対して  $f(x) = 0$  であることを示せ.

(ii)  $u$  を  $n$  次元ベクトル,  $Q$  を  $n \times n$  正定値対称行列とする.  $x \in R^n$  を決定変数とする次の非線形計画問題を考える.

$$(P): \begin{array}{ll} \text{minimize} & u^\top x \\ \text{subject to} & x^\top Q x \leq u^\top Q u \end{array}$$

ここで  $\top$  は転置記号を表す. 次の (A), (B) に答えよ.

(A) カルシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Khun-Tucker 条件) を用いて, 問題 (P) の最適解と目的関数の最小値を求めよ.

(B) 上の結果を用いて, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$(u^\top u)^2 \leq (u^\top Q u)(u^\top Q^{-1} u)$$