線形計画

3

つぎの線形計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}): & \text{Maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
 & \text{subject to} & \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} \leqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\
 & & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1 \\
 & & \quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルであり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ はいずれも n 次元定数ベクトルである．特に，ベクトル $\boldsymbol{b}$ の成分はすべて正である．なお，ベクトルはすべて列ベクトル，$^\top$ は転置記号であり，ベクトルの不等式は対応する各成分に対して不等式が成り立つことを意味する．

以下の命題 (i), (ii), (iii) が正しいことを示せ．

(i) 問題 (P) は必ず最適解をもち，目的関数の最大値は非負である．

(ii) 問題 (P) の目的関数の最大値が 0 のとき，またそのときに限り，つぎの式 $(*)$ を満たす実数 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ が存在する．

$$
(*) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{a}_i \geqq \boldsymbol{c} \\
y_i \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{array}
\right.
$$

(iii) 問題 (P) から制約条件 $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1$ を取り除いた問題を (P') と表す．問題 (P') の目的関数の最大値が 0 のとき，またそのときに限り，(ii) の式 $(*)$ を満たす実数 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ が存在する．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Consider the following linear programming problem:

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}: \quad \text{Maximize} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} \leqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\
& \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1, \\
& \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0},
\end{aligned}
$$

where $\boldsymbol{x}$ is an n-dimensional vector of variables, and $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ are n-dimensional vectors of constants. All elements of vector $\boldsymbol{b}$ are positive. Vectors are all column vectors, the superscript $^\top$ denotes transposition, and a vector inequality means that the inequality holds element-wise.

Show that the following statements (i), (ii) and (iii) are true.

(i) Problem (P) always has an optimal solution, and the maximum objective value is non-negative.

(ii) The maximum objective value of Problem (P) is zero if and only if there exist real numbers $y_1, y_2, \ldots, y_m$ satisfying

$$
(*) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{a}_i \geqq \boldsymbol{c}, \\ y_i \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}
$$

(iii) Let (P') denote the problem obtained by removing the constraint $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1$ from (P). The maximum objective value of Problem (P') is zero if and only if there exist real numbers $y_1, y_2, \ldots, y_m$ satisfying $(*)$ in (ii).