# グラフ理論

**2**

$G=(V,E)$ を節点集合 $V$，枝集合 $E$ から成る単純完全有向グラフ，$N=[G,w]$ を $G$ の各枝 $e\in E$ に実数値の重み $w(e)$ を与えて得られるネットワークとする．点 $u$ から点 $v$ への有向枝は $(u,v)$ と書き，その枝重みは $w(u,v)$ とも書く．ウォークを同じ点を 2 度以上経由することを許した有向経路と定め，ウォーク $P$ の枝 $e$ の重み $w(e)$ の和を $w(P)$ と書く．$G$ の 1 点 $s$ を指定し，点 $s$ から高々 $k$ 本の枝を経由して点 $v$ へ至るウォーク $P$ の重み $w(P)$ のうち最小の値を $\ell_k(v)$ と書く．$G$ の節点数を $n$ とする．以下の問いに答えよ．

(i) 以下の漸化式が $k\geqq 1,\ v\in V$ に対して成り立つことを証明せよ．

$$\ell_1(s)=0,\ \ell_1(v)=w(s,v),\quad v\in V-\{s\},$$

$$\ell_k(v)=\min\{\ell_{k-1}(v),\min_{(u,v)\in E}\{\ell_{k-1}(u)+w(u,v)\}\},\quad v\in V,\ k\geqq 2$$

(ii) ある整数 $q\geqq 2$ が存在してすべての点 $v\in V$ に対して $\ell_{q-1}(v)=\ell_q(v)$ が成り立つとき，$N$ のどの有向閉路 $C$ の枝重み和 $w(C)$ も非負であることを証明せよ．

(iii) $N$ の任意の有向閉路の枝重み和が非負であるとき，すべての点 $v\in V$ に対して $\ell_{n-1}(v)=\ell_n(v)$ が成り立つことを証明せよ．

An English Translation:

# Graph Theory

2

Let $G = (V, E)$ denote a simple, complete directed graph with a vertex set $V$ and an edge set $E$, and let $N = [G, w]$ denote a network obtained from $G$ by assigning a real value $w(e)$ to each edge $e \in E$ as its weight. A directed edge from a vertex $u$ to a vertex $v$ is denoted by $(u, v)$ and its weight is written as $w(u, v)$. A walk is a directed path that is allowed to visit the same vertex more than once, and the sum of weights $w(e)$ of edges $e$ in a walk $P$ is denoted by $w(P)$. For a specified vertex $s$ in $G$, let $\ell_k(v)$ denote the minimum of weight $w(P)$ of a walk from $s$ to a vertex $v$ passing through at most $k$ edges. Let $n$ denote the number of vertices in $G$. Answer the following questions.

(i) Prove that the following recurrence holds for $k \geqq 1$ and $v \in V$,

$$\ell_1(s) = 0, \ \ \ell_1(v) = w(s, v), \quad v \in V - \{s\},$$

$$\ell_k(v) = \min\{\ell_{k-1}(v), \min_{(u,v)\in E}\{\ell_{k-1}(u) + w(u, v)\}\}, \quad v \in V, \ k \geqq 2.$$

(ii) Prove that the sum $w(C)$ of edge weights in any directed cycle $C$ in $N$ is nonnegative if there is an integer $q \geqq 2$ such that $\ell_{q-1}(v) = \ell_q(v)$ holds for all vertices $v \in V$.

(iii) Prove that $\ell_{n-1}(v) = \ell_n(v)$ holds for all vertices $v \in V$ if the sum $w(C)$ of edge weights in every directed cycle $C$ in $N$ is nonnegative.