オペレーションズ・リサーチ

3

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_j:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(j=1,\dots,m)$ を連続的微分可能な凸関数とする．次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & g_j(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \ \ (j=1,\dots,m) \end{array}$$

この問題に対して，以下のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を満たすベクトル $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^m$ とが存在するとする．

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$
$$g_j(\boldsymbol{x}^*) \leqq 0,\ \mu_j^* \geqq 0,\ \mu_j^* g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \ \ (j=1,\dots,m)$$

ただし，μ_j^* は $\boldsymbol{\mu}^*$ の第 j 成分を表す．

さらに，関数 $\ell:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$\ell(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* g_j(\boldsymbol{x})$$

以下の問いに答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\ell(\boldsymbol{x}) - \ell(\boldsymbol{y}) \geqq \nabla \ell(\boldsymbol{y})^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

ただし，$^\top$ はベクトルの転置を表す．

(ii) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\ell(\boldsymbol{x}) \geqq \ell(\boldsymbol{x}^*)$$

(iii) 問 (ii) の不等式を用いて，$\boldsymbol{x}^*$ が問題 P の大域的最適解であることを示せ．

(iv) $n=2, m=2$ とする．さらに，凸関数 f，g_1，g_2 を以下のように定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(x_1-1)^2 + \frac{1}{2}(x_2-1)^2,\ \ g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1,\ \ g_2(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 1$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ である．このとき，問題 P のカルーシュ・キューン・タッカー条件を満たすベクトル $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^2$ と $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^2$ を求めよ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, m)$ be continuously differentiable convex functions. Consider the following nonlinear optimization problem,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & g_j(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \ \ (j = 1, \dots, m). \end{array}$$

Suppose that there exist vectors $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^m$ that satisfy the following Karush-Kuhn-Tucker conditions for Problem P,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0},$$
$$g_j(\boldsymbol{x}^*) \leqq 0, \ \mu_j^* \geqq 0, \ \mu_j^* g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \ \ (j = 1, \dots, m),$$

where μ_j^* denotes the jth element of $\boldsymbol{\mu}^*$.

Let $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by

$$\ell(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* g_j(\boldsymbol{x}).$$

Answer the following questions.

(i) Show that the following inequality holds for all $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\ell(\boldsymbol{x}) - \ell(\boldsymbol{y}) \geqq \nabla \ell(\boldsymbol{y})^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$

where the superscript $^\top$ denotes the transposition of a vector.

(ii) Show that the following inequality holds for all $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\ell(\boldsymbol{x}) \geqq \ell(\boldsymbol{x}^*).$$

(iii) Using the inequality in (ii), show that $\boldsymbol{x}^*$ is a global optimal solution of Problem P.

(iv) Let $n = 2$ and $m = 2$. Moreover let convex functions f, g_1 and g_2 be defined by

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2, \ g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1, \ g_2(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 1,$$

respectively. Here $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$. Then compute vectors $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^2$ and $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^2$ that satisfy the Karush-Kuhn-Tucker conditions for Problem P.