Japanese version shall be the authorized version; the English translation for reference only.

京都大学大学院情報学研究科
修士課程 数理工学専攻入学者選抜試験問題
(平成27年度4月期入学)

Admissions for April 2015
Entrance Examination for Master's Program
Department of Applied Mathematics and Physics
Graduate School of Informatics, Kyoto University

平成26年8月6日(水)15:30 – 17:30
August 6, 2014 15:30 - 17:30

専門科目
Major Subjects

選択科目 (Choice of Subjects)

応用数学、グラフ理論、オペレーションズ・リサーチ、現代制御論、物理統計学、力学系数学
Applied Mathematics, Graph Theory, Operations Research, Modern Control Theory, Physical Statistics, Mathematics for Dynamical Systems

注意 (NOTES)

1. 上記科目から2科目選択すること。
   3科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
2. 日本語または英語で解答すること。
3. 解答は1科目につき解答用紙1枚に記入すること。
   解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
4. 問題冊子は持ち帰ってよいが、解答用紙は持ち帰ってはならない。

1. Choose 2 subjects out of those 6 stated above.
   Note that in case three or more subjects are chosen and answered, they may be regarded as no answers.
2. Answer the questions in Japanese or English.
3. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used. In that case, state "Over" at the end of the page, however, do not write on the shaded area.
4. Examinees may keep question sheets after the examination, however, they must not keep any answer sheets.

応用数学

$\boxed{1}$

関数 $f(z)$ は，$R>0$ をある定数とし，領域 $0<|z|<R$ において正則で，$0<r<R$，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^n}dz=\frac{\langle\alpha\rangle_n}{(|n|!)^2}$$

が成り立つものとする．ただし，$\alpha \in \mathbb{C}$ は定数で，$\langle\alpha\rangle_n$ は

$$\langle\alpha\rangle_n=\begin{cases}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n>0)\\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n+1) & (n<0)\\ 1 & (n=0)\end{cases}$$

で定義される．このとき以下の問いに答えよ．

(i) $f(z)$ は $|z|<R$ において正則でないことを示せ．

(ii) $0<|z|<R$ における $f(z)$ のローラン展開を求めよ．

(iii) N をある自然数として $z=0$ が $f(z)$ の N 位の極であるものとする．このとき，α を N で表せ．また，任意の自然数 n に対して，関数

$$g(z)=\begin{cases}z^N f(z) & (0<|z|<R)\\ \lim_{z\to 0} z^N f(z) & (z=0)\end{cases}$$

の n 階微分係数 $\dfrac{d^n g}{dz^n}(0)$ を求めよ．

(iv) $z=0$ が $f(z)$ の真性特異点となるための，α の必要十分条件を求めよ．

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

For a constant $R > 0$, let $f(z)$ be a function which is holomorphic in the region $0 < |z| < R$ and satisfies

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^n}dz = \frac{\langle\alpha\rangle_n}{(|n|!)^2}$$

for $0 < r < R$ and any $n \in \mathbb{Z}$, where $\alpha \in \mathbb{C}$ is a constant and $\langle\alpha\rangle_n$ is defined by

$$\langle\alpha\rangle_n = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n > 0) \\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n+1) & (n < 0) \\ 1 & (n = 0). \end{cases}$$

Answer the following questions.

(i) Show that $f(z)$ is not holomorphic in $|z| < R$.

(ii) Obtain the Laurent series of $f(z)$ in $0 < |z| < R$.

(iii) Assume that $z = 0$ is an Nth-order pole of $f(z)$ for a positive integer N. Express α by using N. Moreover, let

$$g(z) = \begin{cases} z^N f(z) & (0 < |z| < R) \\ \lim\limits_{z\to 0} z^N f(z) & (z = 0). \end{cases}$$

Obtain the nth-order differential coefficient $\dfrac{d^n g}{dz^n}(0)$ for any positive integer n.

(iv) Find a necessary and sufficient condition on α for $z = 0$ to be an essential singularity of $f(z)$.

グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純有向グラフとし，$N=[G,c]$ を G の各枝 $e\in E$ に実数値の容量 $c(e)>0$ を与えて得られるネットワークとする．節点の部分集合 $X,Y\subseteqq V$ に対し，X 内の点から Y 内の点へ向かう枝の集合を $E(X,Y)$ と記す．非負実数の集合を $\mathbb{R}_+$ で表す．指定された二点 $s,t\in V$ に対し，流量保存則 $\sum_{e\in E(\{v\},V-\{v\})} f(e)-\sum_{e\in E(V-\{v\},\{v\})} f(e)=0,\ ^\forall v\in V-\{s,t\}$ および容量制約 $f(e)\leqq c(e),\ ^\forall e\in E$ を満たす関数 $f:E\to\mathbb{R}_+$ を (s,t) フローと呼び，その流量 $\mathrm{val}(f)$ を

$$\sum_{e\in E(\{s\},V-\{s\})} f(e)-\sum_{e\in E(V-\{s\},\{s\})} f(e)$$

で定める．また，$s\in X,\ t\in V-X$ なる節点の部分集合 $X\subseteqq V$ を (s,t) カットと呼び，その容量 $\mathrm{cap}(X)$ を

$$\sum_{e\in E(X,V-X)} c(e)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の (s,t) フロー f と (s,t) カット X に対し，等式

$$\mathrm{val}(f)=\sum_{e\in E(X,V-X)} f(e)-\sum_{e\in E(V-X,X)} f(e)$$

が成り立つことを証明せよ．

(ii) 与えられた (s,t) フロー f に対して定められる残余ネットワーク $N_f=[G_f=(V,E_f),c_f]$ の作り方を説明せよ．

(iii) ある (s,t) フロー f に対し，残余ネットワーク N_f において s から到達可能な節点の集合を S とする．$t\notin S$ のとき，S は N において容量を最小にする (s,t) カットであることを示せ．

(iv) N において容量を最小にする任意の (s,t) カット X は，(iii) の (s,t) カット S に対して，$X\supseteqq S$ を満たすことを説明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

2

Let $G = (V, E)$ denote a simple directed graph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, c]$ denote a network obtained from G by assigning a real value $c(e) > 0$ to each edge $e \in E$ as its capacity. For vertex subsets $X, Y \subseteqq V$, let $E(X, Y)$ denote the set of edges that leave a vertex in X and enter a vertex in Y. Let $\mathbb{R}_+$ be the set of nonnegative reals. For two designated vertices $s, t \in V$, an (s,t)-flow is defined to be a mapping $f : E \to \mathbb{R}_+$ which satisfies $\sum_{e \in E(\{v\}, V-\{v\})} f(e) - \sum_{e \in E(V-\{v\}, \{v\})} f(e) = 0$, ${}^\forall v \in V - \{s,t\}$ (flow conservation law) and $f(e) \leqq c(e)$, ${}^\forall e \in E$ (capacity constraint), and its flow value $\mathrm{val}(f)$ is defined to be

$$\sum_{e \in E(\{s\}, V-\{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V-\{s\}, \{s\})} f(e).$$

An (s,t)-cut is defined to be a vertex subset $X \subseteqq V$ such that $s \in X$ and $t \in V - X$, and its capacity $\mathrm{cap}(X)$ is defined to be

$$\sum_{e \in E(X, V-X)} c(e).$$

Answer the following questions.

(i) Prove that for any (s,t)-flow f and any (s,t)-cut X

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E(X, V-X)} f(e) - \sum_{e \in E(V-X, X)} f(e)$$

holds.

(ii) For a given (s,t)-flow f, show how to construct its residual network $N_f = [G_f = (V, E_f), c_f]$.

(iii) For an (s,t)-flow f, let S be the set of all vertices reachable from s in the residual network N_f, and assume that $t \notin S$ holds. Prove that S is an (s,t)-cut in N that minimizes the capacity.

(iv) Prove that any (s,t)-cut X in N that minimizes the capacity satisfies $X \supseteqq S$ for the (s,t)-cut S in (iii).

オペレーションズ・リサーチ

3

関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続的微分可能な凸関数とし，$S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{x}=b\}$ とする．ただし，$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{0}$ でない n 次元ベクトル，b はスカラーであり，$^\top$ はベクトルの転置を表す．

次の凸計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}): & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in S\end{array}$$

さらにパラメータ $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$ を含む次の凸 2 次計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll}\mathrm{P}(\boldsymbol{z}): & \text{Minimize} & \nabla f(\boldsymbol{z})^\top\boldsymbol{y}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{y}\in S\end{array}$$

ここで，決定変数は $\boldsymbol{y}$ である．任意の $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$ に対して問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{z})$ は唯一の最適解 $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$ をもつ．

以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{z}\in S$ とする．問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{z})$ のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を用いて $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$ を求めよ．

(ii) $\boldsymbol{x}\in S$ かつ $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ であるとき，$\boldsymbol{x}$ は問題 (P) の最適解であることを示せ．

(iii) $\boldsymbol{x}\in S$ かつ $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{x}$ であるとき，

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^\top(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x})<0,\quad \boldsymbol{a}^\top(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x})=0$$

であることを示せ．

(iv) $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{x}$ であるとき，$\boldsymbol{x}$ は問題 (P) の最適解でないことを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable convex function, and let $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b\}$, where $\boldsymbol{a}$ is an n-dimensional nonzero vector, b is a scalar, and the superscript $^\top$ denotes transposition of a vector.

Consider the following convex programming problem:

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}): & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in S. \end{array}$$

Moreover, consider the following convex quadratic programming problem with a vector $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ of parameters:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{z}): & \text{Minimize} & \nabla f(\boldsymbol{z})^\top \boldsymbol{y} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{y} \in S, \end{array}$$

where $\boldsymbol{y}$ is the vector of decision variables. For each $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{z})$ has a unique optimal solution $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$.

Answer the following questions.

(i) Let $\boldsymbol{z} \in S$. Obtain $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$ by using Karush-Kuhn-Tucker conditions for problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{z})$.

(ii) Suppose that $\boldsymbol{x} \in S$ and $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Then show that $\boldsymbol{x}$ is an optimal solution to problem (P).

(iii) Suppose that $\boldsymbol{x} \in S$ and $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$. Then show that

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^\top(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) < 0, \quad \boldsymbol{a}^\top(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) = 0.$$

(iv) Suppose that $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$. Then show that $\boldsymbol{x}$ is not an optimal solution to problem (P).

現代制御論

$\boxed{4}$

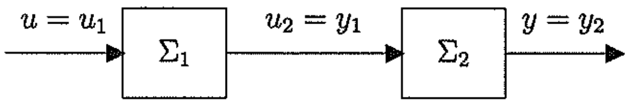

図 1：直列接続

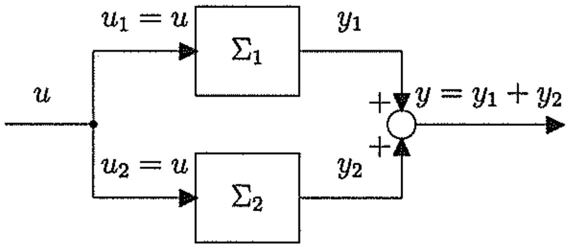

図 2：並列接続

線形動的システム Σ_1, Σ_2 が線形状態方程式

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

で記述されている．ただし $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ はそれぞれのシステムの状態ベクトル，$u_1(t) \in \mathbb{R}$, $u_2(t) \in \mathbb{R}$ はそれぞれのシステムの入力，$y_1(t) \in \mathbb{R}$, $y_2(t) \in \mathbb{R}$ はそれぞれのシステムの出力である．また $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$, $D_1 \in \mathbb{R}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}$, $D_2 \in \mathbb{R}$ とする．以下の問い (i)-(v) に答えよ．

(i) 図 1 の直列接続において，状態ベクトルを

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

とるとき，入力を $u(t)$，出力を $y(t)$ とするシステムの状態方程式を求めよ．

(ii) 図 2 の並列接続において，状態ベクトルを

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

とるとき，入力を $u(t)$，出力を $y(t)$ とするシステムの状態方程式を求めよ．

(iii) この小問では，

$$A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 1, D_1 = 0, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = 0$$

として，システム Σ_1, Σ_2 を定め，図 1 のように直列接続されたシステムを考える．ただし k は実数である．このシステムの可観測性を調べよ．次に，Σ_1 の初期値を $x_1(0) = 3$ とする．適当な Σ_2 の初期値 $x_2(0)$ を選択し，直列接続されたシステムの入力 $u(t)$ を恒等的に 0 とすると，出力 $y(t)$ も恒等的に 0 になった．このとき k と $x_2(0)$ を求めよ．

(iv) システム Σ_1 が可観測であるためには行列

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n_1 - 1} \end{bmatrix}$$

が正則であることが必要十分であることが知られている．この条件は，A_1 の任意の固有ベクトル $z \neq 0$ が $C_1 z \neq 0$ を満たすことと等価であることを証明せよ．

(v) システム Σ_1, Σ_2 は可観測であるとする．このとき (ii) で与えた状態方程式が可観測であるための必要十分条件は，行列 A_1, A_2 が共通固有値を持たないことを証明せよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

4

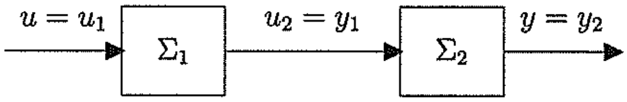

Fig.1: Series connection

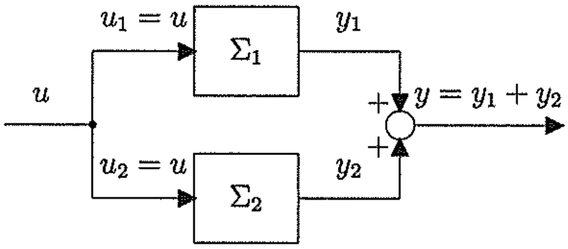

Fig.2: Parallel connection

Linear dynamical systems Σ_1 and Σ_2 are described by the linear state equations:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}, \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases},$$

where $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ are the state vectors, $u_1(t) \in \mathbb{R}$, $u_2(t) \in \mathbb{R}$ are the inputs, and $y_1(t) \in \mathbb{R}$, $y_2(t) \in \mathbb{R}$ are the outputs of the systems Σ_1, Σ_2, respectively. Furthermore, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$, $D_1 \in \mathbb{R}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}$, and $D_2 \in \mathbb{R}$. Answer the following questions (i)-(v).

(i) Describe the state equation of the system with series connection shown in Fig. 1 when the input is $u(t)$, the output is $y(t)$, and the state vector is chosen as

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Describe the state equation of the system with parallel connection shown in Fig. 2 when the input is $u(t)$, the output is $y(t)$, and the state vector is chosen as

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(iii) In this subproblem, consider the system with series connection shown in Fig. 1 where Σ_1 and Σ_2 are given by

$$A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 1, D_1 = 0, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = 0,$$

and k is a real constant. Check the observability of the system. Let the initial condition of Σ_1 be given as $x_1(0) = 3$. Suppose that the output $y(t)$ of the system becomes identically 0 when the input $u(t)$ is identically 0 and the initial condition $x_2(0)$ of Σ_2 is appropriately selected. Determine k and $x_2(0)$.

(iv) It is known that the system Σ_1 is observable if and only if the matrix

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n_1 - 1} \end{bmatrix}$$

is nonsingular. Prove that this condition is equivalent to the statement that any eigenvector $z \neq 0$ of A_1 satisfies $C_1 z \neq 0$.

(v) Assume that the systems Σ_1 and Σ_2 are observable. Prove that the state equation derived in (ii) is observable if and only if the matrices A_1 and A_2 share no common eigenvalues.

物理統計学

$\boxed{5}$

粒子の速度 $v(t)$ は, 次のランジュバン方程式に従うものとする.

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\zeta v(t) + \eta(t)$$

ここで, m と ζ は正の定数であり, それぞれ質量と摩擦係数を表す. $\eta(t)$ は白色雑音で, $\langle\eta(t)\rangle = 0,\quad \langle\eta(t)\eta(s)\rangle = 2\epsilon\delta(t-s)$ を満足する. $\langle A\rangle$ は A の平均を表し, ϵ は正の定数, $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数とする. また $t\to\infty$ でエネルギー等分配則が成り立つ, すなわち, k_B をボルツマン定数, T を温度とする時, $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}m\langle v^2(t)\rangle = \frac{1}{2}k_BT$ とする. 以下の問いに答えよ.

(i) $v(t) = e^{-\gamma t}\left(\int_0^t e^{\gamma s}(\frac{\eta(s)}{m})ds + v(0)\right)$ を示せ. 但し, $\gamma = \frac{\zeta}{m}$ とおいた.

(ii) ゆらぎ $\langle v^2(t)\rangle$ を求めよ.

(iii) $t\to\infty$ の極限で, 揺動散逸定理

$$\epsilon = k_BT\zeta$$

が成立することを示せ.

(iv) 速度の相関 $\langle v(t)v(s)\rangle$ を求めよ.

(v) 位置変数 $x(t)$ は, $x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds$ を満足する変数とする. その時,

$$D = \lim_{t\to\infty}\frac{\langle\{x(t)-x(0)\}^2\rangle}{2t}$$

によって定義される拡散係数 D に関して

$$D = \frac{1}{\zeta}k_BT$$

が成立することを示せ.

An English Translation:

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Let the velocity $v(t)$ of a particle obey the following Langevin equation,

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\zeta v(t) + \eta(t),$$

where m is a positive constant (corresponding to the mass), ζ is a positive constant (corresponding to the friction coefficient), and $\eta(t)$ is the white noise, which satisfies the relations $\langle \eta(t) \rangle = 0$ and $\langle \eta(t)\eta(s) \rangle = 2\epsilon\delta(t-s)$. Here, $\langle A \rangle$ denotes the average of A, ϵ a positive constant and $\delta(t)$ the Dirac delta function. Assume that the energy equipartition law $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}m\langle v^2(t)\rangle = \frac{1}{2}k_B T$ holds, where k_B is the Boltzmann constant and T is a temperature. Answer the following questions.

(i) Show that $v(t) = e^{-\gamma t}\left(\int_0^t e^{\gamma s}(\frac{\eta(s)}{m})ds + v(0)\right)$, where $\gamma = \frac{\zeta}{m}$.

(ii) Compute the fluctuation $\langle v^2(t) \rangle$.

(iii) Show that the fluctuation-dissipation theorem

$$\epsilon = k_B T \zeta$$

holds in the limit $t \to \infty$.

(iv) Compute the velocity correlation $\langle v(t)v(s) \rangle$.

(v) Let $x(t)$ be the position value which satisfies the relation $x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds$. Show that the diffusion coefficient D defined by the following equation

$$D = \lim_{t\to\infty} \frac{\langle \{x(t) - x(0)\}^2 \rangle}{2t}$$

satisfies the relation

$$D = \frac{1}{\zeta}k_B T.$$

力学系数学

6

$a(t)$ を半無限区間 $[1, \infty)$ で定義された連続関数として，微分方程式

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (t^2-1)a(t)\frac{dx}{dt} - ta(t)x = 0, \qquad t \geqq 1 \tag{1}$$

を考える．$x = \dfrac{t^3}{t^2+1}$ を式 (1) のひとつの解とする．以下の問いに答えよ．

(i) 関数 $a(t)$ を求めよ．

(ii) 式 (1) で $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}y$ とおく．y が満たす微分方程式を求めよ．

(iii) (ii) で得られた微分方程式を解き，式 (1) の一般解を求めよ．

(iv) 式 (1) の解 $x(t)$ が半無限区間 $[1, \infty)$ において有界となるための，$t = 1$ における初期値 $(x_0, v_0) = \left(x(1), \dfrac{dx}{dt}(1)\right)$ の必要十分条件を求めよ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $a(t)$ be a continuous function defined on the semi-infinite interval $[1, \infty)$, and consider the differential equation

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (t^2 - 1)a(t)\frac{dx}{dt} - ta(t)x = 0, \qquad t \geqq 1. \tag{1}$$

Assume that $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}$ is a solution of Eq. (1). Answer the following questions.

(i) Determine the function $a(t)$.

(ii) Let $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}y$ in Eq. (1). Derive a differential equation which y has to satisfy.

(iii) Solve the differential equation derived in (ii), and obtain the general solution of Eq. (1).

(iv) Let $x(t)$ be a solution of Eq. (1). Find a necessary and sufficient condition on the initial values $(x_0, v_0) = \left(x(1), \dfrac{dx}{dt}(1)\right)$ at $t = 1$ for $x(t)$ to be bounded on the semi-infinite interval $[1, \infty)$.