Japanese version shall be the authorized version; the English translation for reference only.

京都大学大学院情報学研究科
修士課程 数理工学専攻入学者選抜試験問題
(平成27年度4月期入学)

Admissions for April 2015
Entrance Examination for Master's Program
Department of Applied Mathematics and Physics
Graduate School of Informatics, Kyoto University
平成26年8月6日(水)13:00 – 15:00
August 6, 2014 13:00 - 15:00

基礎科目
Basic Subjects

選択科目 (Choice of Subjects)
基礎数学I、アルゴリズム基礎、線形計画、線形制御理論、基礎力学、基礎数学II
Basic Mathematics I, Data Structures and Algorithms, Linear Programming, Linear Control Theory, Basic Mechanics, Basic Mathematics II

注意 (NOTES)

1. 上記科目から2科目選択すること。
   3科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
2. 日本語または英語で解答すること。
3. 解答は1科目につき解答用紙1枚に記入すること。
   解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
4. 問題冊子は持ち帰ってよいが、解答用紙は持ち帰ってはならない。

1. Choose 2 subjects out of those 6 stated above.
   Note that in case three or more subjects are chosen and answered, they may be regarded as no answers.
2. Answer the questions in Japanese or English.
3. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used. In that case, state "Over" at the end of the page, however, do not write on the shaded area.
4. Examinees may keep question sheets after the examination, however, they must not keep any answer sheets.

基礎数学 I

$\boxed{1}$

指数関数 $E(t,x)=e^{2xt-t^2}$ の展開

$$E(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

を用いて関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ を定める．以下の問いに答えよ．

(i) 関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ は

$$\frac{df_{n+1}(x)}{dx}=2(n+1)f_n(x)$$

を満たすことを示せ.

(ii) 関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ は

$$f_{n+2}(x)=2xf_{n+1}(x)-2(n+1)f_n(x)$$

を満たすことを示せ.

(iii) 関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ は

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{d}{dx}f_n(x)\right)=-2ne^{-x^2}f_n(x)$$

を満たすことを示せ.

(iv) 関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ について等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f_n(x)^2dx=2^n n!\sqrt{\pi}$$

を示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を用いてよい.

An English Translation:

Basic Mathematics I

1

Define the functions $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ by using the following expansion of the exponential function $E(t, x) = e^{2xt-t^2}$

$$E(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Answer the following questions.

(i) Show that

$$\frac{df_{n+1}(x)}{dx} = 2(n+1) f_n(x)$$

for any $n = 0, 1, 2, \dots$.

(ii) Show that

$$f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - 2(n+1) f_n(x)$$

for any $n = 0, 1, 2, \dots$.

(iii) Show that

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \frac{d}{dx} f_n(x)\right) = -2n e^{-x^2} f_n(x)$$

for any $n = 0, 1, 2, \dots$.

(iv) Show the equality

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f_n(x)^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

for any $n = 0, 1, 2, \dots$. You may use the equality $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ without proof.

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし，節点 u の隣接点の集合を $N(u)$ と書く．G の部分グラフ H における節点 u から節点 v への最短路内の枝数を $\mathrm{dist}_H(u,v)$ と書き，H における節点 u から節点 v への最短路の総数を $\sigma_H(u,v)$ と書く．始点 $s \in V$ を選び，T を s からの幅優先探索により得られた G の全域木とする．以下の問いに答えよ．

(i) T を用いて，$d_{\max}=\max\{\mathrm{dist}_G(s,u) \mid u \in V\}$ および $V_i=\{u \in V \mid \mathrm{dist}_G(s,u)=i\}$, $i=0,1,\ldots,d_{\max}$ を $O(|V|)$ 時間で計算する方法を示せ．

(ii) $\{\sigma_G(s,u) \mid u \in V\}$ 内のすべての値を $O(|E|)$ 時間で計算する方法を示せ．

(iii) ある節点 $t \in V-\{s\}$ と節点の部分集合 $A \subsetneqq V-\{s,t\}$ に対して，G における s から t への最短路のうち，A の節点を 1 個は通過するものの個数を $O(|E|)$ 時間で計算する方法を示せ．

(iv) ある節点 $t \in V-\{s\}$ と節点の部分集合 $A \subsetneqq V-\{s,t\}$ に対して，G における s から t への最短路のうち，A の節点を少なくとも 2 個通過するものが存在するかどうかの判定を $O(|E|)$ 時間で行う方法を示せ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E, and let $N(u)$ denote the set of neighbors of a vertex u in G. For a subgraph H of G, let $\mathrm{dist}_H(u, v)$ denote the number of edges in a shortest path from a vertex u to a vertex v in H, and let $\sigma_H(u, v)$ denote the number of shortest paths from a vertex u to a vertex v in H. For a start vertex $s \in V$, let T denote a spanning tree of G obtained by the breadth-first search executed from s. Answer the following questions.

(i) Show how to compute in $O(|V|)$ time $d_{\max} = \max\{\mathrm{dist}_G(s, u) \mid u \in V\}$ and $V_i = \{u \in V \mid \mathrm{dist}_G(s, u) = i\}$, $i = 0, 1, \ldots, d_{\max}$ from T.

(ii) Show how to compute in $O(|E|)$ time all values in $\{\sigma_G(s, u) \mid u \in V\}$.

(iii) A vertex $t \in V - \{s\}$ and a subset $A \subsetneqq V - \{s, t\}$ are given. Show how to compute in $O(|E|)$ time the number of shortest paths from s to t in G which pass through at least one vertex in A.

(iv) A vertex $t \in V - \{s\}$ and a subset $A \subsetneqq V - \{s, t\}$ are given. Show how to test in $O(|E|)$ time whether there is a shortest path from s to t in G which passes through at least two vertices in A.

線形計画

3

以下の (i)，(ii) に答えよ．

(i) 次の線形計画問題 (P1) とその双対問題 (D1) を考える．

$$
\text{(P1)}: \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \text{(D1)}: \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c} \end{array}
$$

ここで，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトル，$\boldsymbol{w}$ は m 次元変数ベクトルであり，$^\top$ は転置記号を表す．問題 (P1) と (D1) は最適解 $\boldsymbol{x}^*$ と $\boldsymbol{w}^*$ をもつとする．さらに $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w}^*$ とする．このとき，$x_i^* > 0$ であれば，$y_i^* = 0$ が成り立つことを示せ．

(ii) 次の線形計画問題を考える．

$$
\text{(P2)}: \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & x_5 \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i \leqq 1 \\ & \displaystyle\sum_{i=k+1}^{4} x_i \leqq k x_k \ \ (k = 1, 2, 3) \\ & x_5 \leqq 4 x_4 \end{array}
$$

問題 (P2) の最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とする．問題 (P2) の双対問題の最適解を求めよ．さらに，

$$
\sum_{i=1}^{4} x_i^* = 1
$$

が成り立つことを示せ．

An English Translation:

Linear Programming

3

Answer the following questions (i) and (ii).

(i) Consider the following linear programming problem (P1) and its dual problem (D1):

$$\text{(P1)}: \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array} \qquad \text{(D1)}: \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c}, \end{array}$$

where $\boldsymbol{A}$ is an $m \times n$ constant matrix, $\boldsymbol{b}$ is an m-dimensional constant vector, $\boldsymbol{c}$ is an n-dimensional constant vector, $\boldsymbol{x}$ is an n-dimensional vector of variables, $\boldsymbol{w}$ is an m-dimensional vector of variables, and $^\top$ denotes transposition. Suppose that problems (P1) and (D1) have optimal solutions $\boldsymbol{x}^*$ and $\boldsymbol{w}^*$, respectively. Let $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w}^*$. Then show that $y_i^* = 0$ if $x_i^* > 0$.

(ii) Consider the following linear programming problem:

$$\text{(P2)}: \begin{array}{ll} \text{Maximize} & x_5 \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i \leqq 1 \\ & \displaystyle\sum_{i=k+1}^{4} x_i \leqq k x_k \quad (k = 1, 2, 3) \\ & x_5 \leqq 4x_4. \end{array}$$

Let $\boldsymbol{x}^*$ be an optimal solution to problem (P2). Obtain an optimal solution to the dual problem of problem (P2). Moreover, show that

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^* = 1.$$

線形制御理論

$\boxed{4}$

伝達関数

$$P(s) = \frac{b}{s^2 + 2as + a^2 + 1}$$

で表される線形時不変システムを考える．ただし，a, b は実数の定数である．以下の問いに答えよ．

(i) 時刻 t におけるこのシステムの入力と出力をそれぞれ $u(t)$ と $y(t)$ とする．このとき，インパルス応答が時刻 $t = \pi/4$ において最大値をとり，さらに $u(t) = \sin t$ のとき $y(t)$ が振幅 1 の正弦波に漸近するような a, b を求めよ．

図 1 の制御系を考える．ただし，$P(s)$ は上で与えられた伝達関数，a, b は (i) で求めた値であり，K は 0 でない実数の定数とする．また $r(t)$ を入力，$y(t)$ を出力とするシステムの伝達関数を $T(s)$ とする．

(ii) $T(s)$ を求め，このシステムを安定化する K の範囲を求めよ．

(iii) $T(s)$ の極の実部がすべて -0.5 以下となる K が存在するか，また $T(s)$ の極の実部がすべて -1 未満となる K が存在するか，それぞれ理由とともに答えよ．

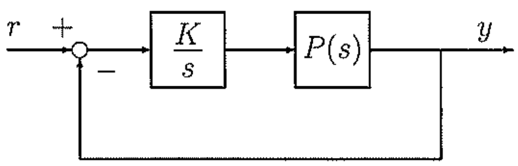

図 1: 制御系

An English Translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

Consider the linear continuous-time system described by the transfer function

$$P(s) = \frac{b}{s^2 + 2as + a^2 + 1},$$

where a and b are real constants. Answer the following questions.

(i) Let $u(t)$ and $y(t)$ be the input and output of this system at time t, respectively. Find the value of a and b such that the impulse response has its maximum at the time $t = \pi/4$, and that $y(t)$ converges to a sinusoid with the amplitude 1 when $u(t) = \sin t$.

Figure 1 shows a control system, where $P(s)$ is given as above, a and b are the values obtained in (i), and K is a nonzero real constant. Let $T(s)$ be the transfer function of the system with input $r(t)$ and output $y(t)$.

(ii) Compute $T(s)$ and determine the range of K for which this system is stable.

(iii) Determine whether there exists K such that every pole of $T(s)$ has the real part less than or equal to -0.5. Determine whether there exists K such that every pole of $T(s)$ has the real part less than -1. The derivation process should be shown.

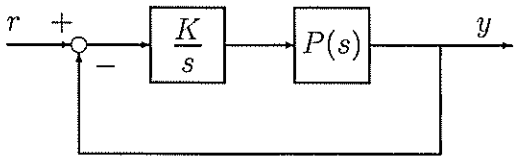

Figure 1: Control system

基礎力学

$\boxed{5}$

質量 m の粒子が力 $\boldsymbol{F} = g(r)\boldsymbol{r}$ を受けて運動している．ここで，$\boldsymbol{r}$ は粒子の原点からの位置ベクトル，$r := |\boldsymbol{r}|$ は $\boldsymbol{r}$ の長さであり，$g(r)$ は $r > 0$ で微分可能な関数である．粒子の位置が原点となることは決してないと仮定する．$\boldsymbol{p} := m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ は粒子の運動量とし，$\boldsymbol{L} := \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は粒子の原点に関する角運度量とする．ここで，$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ のベクトル積（外積）である．以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{F}$ は保存力であることを示せ．

(ii) $\boldsymbol{L}$ が保存されることを証明せよ．

(iii) 粒子は $\boldsymbol{L}$ に垂直で原点を含む平面内を運動する事を説明せよ．

(iv) $f(r)$ が $r > 0$ で微分可能な関数としたとき，任意の初期条件に対して $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - f(r)\boldsymbol{r}$ が保存される場合の $f(r)$ と $g(r)$ を求めよ．任意のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ に対して $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を用いてよい．ここで，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ のスカラー積（内積）である．

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

A particle of mass m is moving under the action of a force $\boldsymbol{F} = g(r)\boldsymbol{r}$, where $\boldsymbol{r}$ denotes the position vector of the particle from the origin, $r := |\boldsymbol{r}|$ stands for the length of $\boldsymbol{r}$ and $g(r)$ is a differentiable function for $r > 0$. It is assumed that the particle is never at the origin. Let $\boldsymbol{p} := m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ be the momentum of the particle, and $\boldsymbol{L} := \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ be the angular momentum of the particle about the origin, where $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ denotes the vector or cross product of $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{p}$. Answer the following questions.

(i) Show that $\boldsymbol{F}$ is a conservative force.

(ii) Prove that $\boldsymbol{L}$ is conserved.

(iii) Explain that the particle is moving within the plane which is perpendicular to $\boldsymbol{L}$ and includes the origin.

(iv) Obtain $f(r)$ and $g(r)$ such that $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - f(r)\boldsymbol{r}$, where $f(r)$ is a differentiable function for $r > 0$, is conserved for arbitrary initial conditions, with the use of $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ for arbitrary vectors $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$, where $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ stands for the scalar or dot product of $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{c}$.

基礎数学 II

6

行列

$$
\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix}
0 & n & & & & & \\
1 & 0 & n-1 & & & \text{\Large 0} & \\
0 & 2 & 0 & n-2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & n-2 & 0 & 2 & \\
 & & & & n-1 & 0 & 1 \\
 & \text{\Large 0} & & & & n & 0
\end{pmatrix}
$$

の固有値 n および $-n$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$ および $\boldsymbol{v}_2$ とする．また，

$$
\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}
$$

として，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_j = (\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \ldots, \delta_{n+1,j})^\top$ を定義する．ここで $^\top$ は，転置を表す．以下の問いに答えよ．

(i) 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

(ii) $n \geqq 2$ とした時，行列 $\boldsymbol{T}$ を $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{n+1})$ によって定義する．このとき，行列 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{T}$ はブロック行列

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}
$$

で表されることを示し，行列 $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{D}$ を求めよ．ここで，$\boldsymbol{0}$ は $(n-1) \times 2$ の零行列を表す．

(iii) (ii) で求めた行列 $\boldsymbol{D}$ および $\boldsymbol{A}_{n-2}$ との間で

$$
\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{A}_{n-2}
$$

を満たす正則な下三角行列 $\boldsymbol{S}$ が存在することを示せ．

(iv) 行列 $\boldsymbol{A}_n$ の固有多項式を計算し，全ての固有値を求めよ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ be eigenvectors of the matrix

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & n & & & & & \\ 1 & 0 & n-1 & & & \text{\Large 0} & \\ 0 & 2 & 0 & n-2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & n-2 & 0 & 2 & \\ & & & & n-1 & 0 & 1 \\ & \text{\Large 0} & & & & n & 0 \end{pmatrix}$$

corresponding to the eigenvalues n and $-n$, respectively. Let $\boldsymbol{e}_j$ be the unit vector $\boldsymbol{e}_j = (\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \ldots, \delta_{n+1,j})^\top$, where $^\top$ denotes the transposition and

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} .$$

Answer the following questions.

(i) Compute eigenvectors $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ of $\boldsymbol{A}_n$.

(ii) Let us define the matrix $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{n+1})$ for $n \geqq 2$. Show that $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{T}$ takes the block matrix structure

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

where $\boldsymbol{0}$ is the $(n-1) \times 2$ zero matrix, and give the matrices $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{D}$ explicitly.

(iii) Show that there exists a regular lower triangular matrix $\boldsymbol{S}$ such that $\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{A}_{n-2}$ holds, where $\boldsymbol{D}$ is the matrix derived in (ii) .

(iv) Compute the characteristic polynomial of $\boldsymbol{A}_n$, and give all the eigenvalues of $\boldsymbol{A}_n$.