オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は2回連続的微分可能な関数とし，$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{0}$ でない n 次元ベクトルとする．

次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = 0 \end{array}$$

ただし，$^\top$ はベクトルの転置を表す．$\boldsymbol{x}^*$ を問題Pの大域的最適解とする．

さらに，次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(k): & \text{Minimize} & f_k(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \leqq 1 \end{array}$$

ただし，k は非負の整数であり，$f_k:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は以下に定義された関数である．

$$f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{k}{2}(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x})^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)$$

問題 $\mathrm{P}(k)$ の大域的最適解を $\boldsymbol{x}^k$ とする．さらに，$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \bar{\boldsymbol{x}}$，$\lim_{k\to\infty} k(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}^k) = \bar{\lambda}$ と仮定する．

以下の問いに答えよ．

(i) 任意の非負の整数 k に対して $f_k(\boldsymbol{x}^k) \leqq f(\boldsymbol{x}^*)$ が成り立つことを示せ．

(ii) $\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}} = 0$，$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^*$ となることを示せ．

(iii) 問題 $\mathrm{P}(k)$ のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を書け．

(iv) 十分大きな k に対して，$\nabla f_k(\boldsymbol{x}^k) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ．

(v) $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \bar{\lambda}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a twice continuously differentiable function, and let $\boldsymbol{a}$ be an n-dimensional nonzero vector.

Consider the following nonlinear programming problem:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = 0, \end{array}$$

where the superscript $^\top$ denotes transposition of a vector. Let $\boldsymbol{x}^*$ be a global optimal solution to problem P.

Moreover consider the following nonlinear programming problem:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(k): & \text{Minimize} & f_k(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \leqq 1, \end{array}$$

where k is a nonnegative integer and $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is the function defined by

$$f_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{k}{2}(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x})^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*).$$

Let $\boldsymbol{x}^k$ be a global optimal solution to problem P(k). Suppose that $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \bar{\boldsymbol{x}}$ and $\lim_{k\to\infty} k(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}^k) = \bar{\lambda}$.

Answer the following questions.

(i) Show that $f_k(\boldsymbol{x}^k) \leqq f(\boldsymbol{x}^*)$ for any nonnegative integer k.

(ii) Show that $\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}} = 0$ and $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^*$.

(iii) Write out Karush-Kuhn-Tucker conditions for problem P(k).

(iv) Show that $\nabla f_k(\boldsymbol{x}^k) = \boldsymbol{0}$ for all k sufficiently large.

(v) Show that $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \bar{\lambda}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.