

基礎数学 I

1

$a > 0$ を実数として, 半無限区間 $[0, \infty)$ 上で定義された関数 $f(x) = e^x - ax^2$ を考える.
 $f(x)$ が狭義単調増加であるとき, 以下の問いに答えよ.

- (i) $f(x)$ は狭義単調増加である. 定数 a が取り得る値の範囲を求めよ.
- (ii) 関数 $y = f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(y)$ とする. 定積分 $F(a) = \int_1^{f(a)} f^{-1}(y) dy$ の値を求めよ.
- (iii) b を実数として, $F(a) = b$ を満たす定数 a が (i) で求めた範囲にただ一つ存在するものとする. ただし, $F(a)$ は (ii) で求めたものである. 定数 b の値の範囲を求めよ.

An English Translation:

Basic Mathematics I

1

Let $a > 0$ be a real number. Consider a function $f(x) = e^x - ax^2$ defined on the semi-infinite interval $[0, \infty)$. Assume that $f(x)$ is strictly increasing. Answer the following questions.

- (i) Obtain the range of values of the constant a such that $f(x)$ is strictly increasing.
- (ii) Let $f^{-1}(y)$ be the inverse function of the function $y = f(x)$. Obtain the value of the definite integral $F(a) = \int_1^{f(a)} f^{-1}(y) dy$.
- (iii) Let b be a real number. Assume that in the range obtained in (i) there exists a unique value of a satisfying $F(a) = b$. Here $F(a)$ is obtained in (ii). Obtain the range of values of the constant b .