

応用数学

1

a を正の実数とし, 上半平面 $H = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ 上で定義された関数

$$f(z) = \frac{z+1-a}{z+1}, \quad z \in H$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (i) 任意の $z \in H$ に対して, $f(z) \in H$ であることを示せ.
- (ii) 任意の $w \in H$ に対して, $w = f(z)$ なる $z \in H$ が一意に存在することを示せ.
- (iii) 1次分数変換 $w = f(z)$ による半円 $|z| = 1$ ($z \in H$) の像を求めよ.
- (iv) $f(z) = z$ なる点 $z \in H$ の存在を調べ, 存在する場合にはそれをすべて求めよ.
- (v) 任意の $z \in H$ に対して, 関数列 $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) を

$$f_1(z) = f(z), \quad f_n(z) = f(f_{n-1}(z)) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

で定める. 任意の $z \in H$ に対して $f_4(z) = f_1(z)$ が成り立つような正定数 a の値を求めよ.

An English Translation:

Applied Mathematics

1

Let a be a positive real number. Let H be the upper half plane defined by $H = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$. Consider the function

$$f(z) = \frac{z + 1 - a}{z + 1}, \quad z \in H.$$

Answer the following questions.

- (i) Show that $f(z) \in H$ for any $z \in H$.
- (ii) Show that there uniquely exists $z \in H$ such that $w = f(z)$ for any $w \in H$.
- (iii) Find the image of the half circle $|z| = 1$ ($z \in H$) by the linear fractional transformation $w = f(z)$.
- (iv) Investigate the points $z \in H$ such that $f(z) = z$ and find all of them if they exist.
- (v) Let us define a sequence of functions $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) by

$$f_1(z) = f(z), \quad f_n(z) = f(f_{n-1}(z)) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

for any $z \in H$. Find the positive number a such that $f_4(z) = f_1(z)$ for any $z \in H$.