

## 線形計画

3

$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^\top \in \mathbb{R}^5$  をパラメータにもつ次の線形計画問題  $P(\mathbf{c})$  を考える.

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c}): \quad & \text{Minimize} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ & \quad \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ここで、決定変数は  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5$  であり、 $^\top$  は転置記号を表す.

問題  $P(\mathbf{c})$  の最適解の集合を  $X(\mathbf{c})$  とする. さらに、 $\emptyset$  を空集合、 $\mathbb{Z}$  を整数全体の集合、 $\mathbb{Z}^5 = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^\top \in \mathbb{R}^5 \mid z_i \in \mathbb{Z} (i = 1, 2, 3, 4, 5)\}$  とする.

以下の問いに答えよ.

- (i) 問題  $P(\mathbf{c})$  の双対問題を書け.
- (ii) 任意の  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$  に対して  $X(\mathbf{c}) \neq \emptyset$  であることを示せ.
- (iii) 任意の  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$  に対して  $X(\mathbf{c}) \cap \mathbb{Z}^5 \neq \emptyset$  であることを示せ.
- (iv) 次の命題 (A) について、真であれば証明を、偽であれば反例を与えよ.  
(A) 任意の  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$  に対して  $X(\mathbf{c}) \subseteq \mathbb{Z}^5$  である.

An English Translation:

## Linear Programming

3

Consider the following linear programming problem  $P(\mathbf{c})$  with a vector  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^\top \in \mathbb{R}^5$  of parameters:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c}): \quad & \text{Minimize} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ & \quad \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

where  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5$  represents decision variables, and the superscript  $^\top$  denotes the transposition of a vector.

Let  $X(\mathbf{c})$  be the set of solutions to problem  $P(\mathbf{c})$ . Moreover, let  $\emptyset$  denote the empty set, let  $\mathbb{Z}$  denote the set of all integers, and  $\mathbb{Z}^5 = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^\top \in \mathbb{R}^5 \mid z_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, 2, 3, 4, 5)\}$ .

Answer the following questions.

- (i) Write out a dual problem of problem  $P(\mathbf{c})$ .
- (ii) Show that  $X(\mathbf{c}) \neq \emptyset$  for any  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$ .
- (iii) Show that  $X(\mathbf{c}) \cap \mathbb{Z}^5 \neq \emptyset$  for any  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$ .
- (iv) Prove or disprove the following proposition (A), giving a proof or a counterexample.  
(A)  $X(\mathbf{c}) \subseteq \mathbb{Z}^5$  for any  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$ .