

オペレーションズリサーチ

3

以下の問 (i), (ii) に答えよ.

(i) A を $n \times n$ の実対称行列とし, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$$

とする. ただし, \top は転置を表す. 以下の (a) に答えよ.

(a) A が半正定値行列のとき, g は凸関数であることを示せ.

f を \mathbb{R}^n から \mathbb{R} への凸関数とし, 次の非線形計画問題を考える.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to} && \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

この問題の大域的最適解の集合を X とし, X は空集合ではないとする. 以下の (b), (c) に答えよ.

(b) A が半正定値行列のとき, X は凸集合であることを示せ.

(c) A が正定値行列のとき, X の要素は唯一であることを示せ.

(ii) α と b_i ($i = 1, \dots, m$) を正の定数とする. 決定変数が $(x_1, \dots, x_m, y, z_1, \dots, z_m)$ である次の非線形計画問題を考える.

$$\begin{aligned} \text{(P):} \quad & \text{minimize} && \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m x_i^2 - \alpha y + \sum_{i=1}^m z_i \\ & \text{subject to} && x_i \geq b_i + y - z_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ & && y \geq 0, \quad z_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

$(x_1^*, \dots, x_m^*, y^*, z_1^*, \dots, z_m^*)$ を問題 (P) の大域的最適解とする. 次の (A)-(C) に答えよ.

(A) 問題 (P) のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け.

(B) $z_i^* > 0$ である i に対して, $x_i^* = 1$ であることを示せ.

(C) $K = \{i \mid x_i^* < b_i\}$ とする. $y^* > 0$ のとき, $|K| \leq \alpha$ となることを示せ. ただし, $|K|$ は集合 K の要素の数を表す.