

## 力学系数学

6

以下の問いに答えよ.

- (i) 実3次元ベクトル  $v, w$  の内積を  $\langle v, w \rangle$  と書き, 外積を  $v \times w$  と書く. ベクトル  $e$  は  $\langle e, e \rangle = 1$  をみたすものとする. 線形作用素  $P, Q, J$  を以下のように定義する. ベクトルの成分  $e = (e_1, e_2, e_3)^T$  を用いて  $P, Q, J$  に対応する行列を書け. ただし, 一般の行列  $R$  の転置行列を  $R^T$  と書く.

$$(1) Pv = \langle e, v \rangle e \quad (2) Qv = v - \langle e, v \rangle e \quad (3) Jv = e \times v$$

- (ii) 次の関係式が成り立つことを示せ.

$$(1) P^2 = P \quad (2) Q^2 = Q \quad (3) J^2 = -Q \\ (4) PQ = QP = 0 \quad (5) PJ = JP = 0 \quad (6) QJ = JQ = J$$

- (iii) 実数  $\theta$  と (i) で定めた行列  $J$  について次の式が成り立つことを示せ.

$$\exp(\theta J) = P + (\cos \theta)Q + (\sin \theta)J$$

ただし, 正方行列  $A$  の指数関数は  $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$  と定義される.

- (iv) 一般に,  $n$  次正方行列  $A$  と  $n$  次元定数ベクトル  $b$  が与えられたとき,  $n$  次元ベクトル値関数  $x(t)$  に対する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b$$

の初期値問題を解け.

- (v) 実数  $\omega$  と 3 次元定数ベクトル  $v$  が与えられたとき, 3 次元ベクトル値関数  $x(t)$  に対する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \omega e \times x + v$$

の初期値問題の解を  $P, Q, J$  を用いて書け. ただし,  $e$  は (i) で与えた 3 次元定数ベクトルである.