基礎数学 I

$\boxed{1}$

関数 $f(x) = e^{-x^2}$ は $(-\infty, \infty)$ において積分可能である．級数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi)$ が区間 $(-\infty, \infty)$ で一様収束することに注意して，周期関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(i) 積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$$

を求めよ．

(ii) $|x| \geqq \pi$ において，不等式

$$f(x) \leqq e^{-\pi|x|} \qquad (*)$$

が成り立つことを示せ．

(iii) $|x| \leqq \pi$ とする．不等式 (*) を用いて

$$|F(x) - f(x)| < \frac{2e^{-\pi^2}}{1-e^{-2\pi^2}}$$

が成り立つことを示せ．

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

The function $f(x) = e^{-x^2}$ is integrable over $(-\infty, \infty)$. Let $F(x)$ be a periodic function defined by

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2k\pi),$$

where the series $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi)$ converges uniformly over the interval $(-\infty, \infty)$. Answer the following questions.

(i) Compute the integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx.$$

(ii) For any x such that $|x| \geqq \pi$ show the inequality

$$f(x) \leqq e^{-\pi|x|}. \qquad (*)$$

(iii) For any x such that $|x| \leqq \pi$ show

$$|F(x) - f(x)| < \frac{2e^{-\pi^2}}{1 - e^{-2\pi^2}}$$

by using the inequality (*).