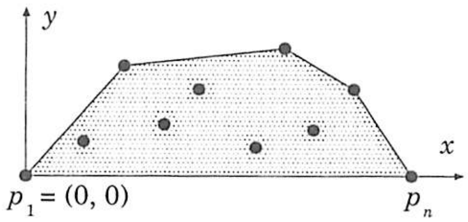
アルゴリズム基礎

2

次の条件を満たす点の集合 $S = \{p_i = (x_i, y_i) \mid 1 \leqq i \leqq n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の凸包を計算する問題を考える.

$$0 = x_1 < x_i < x_n,\ 0 = y_1 = y_n < y_i,\ 2 \leqq i \leqq n-1;\quad x_i \neq x_j,\ i \neq j$$

任意の実数が $O(1)$ の領域量で記憶できると仮定し，凸包の境界を作る点を時計回りの順に p_1 から p_n まで出力するアルゴリズムを考える (下図参照). 以下の問いに答えよ.



(i) S の点を x_i の昇順に整列する $O(n \log n)$ 時間のアルゴリズムを一つ与えよ.

(ii) 以下のアルゴリズムが $O(n \log n)$ 時間で実装できること，および正しく S の凸包を計算できることを示せ.

点 $p_1, \ldots, p_n$ を x_i の昇順に整列し，$q_1 = p_1, q_2, \ldots, q_n = p_n$ とする.
空のリスト L を用意し，q_1 と q_2 を順に L の末尾に挿入する.
for $k = 3, \ldots, n$ do
　L の末尾に q_k を挿入する.
　while $|L| \geqq 3$ かつ最後の三点 q_i, q_j, q_k が $\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \leqq \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j}$ を満たす do
　　真ん中の点 q_j を L から取り除く.
　end while
end for
L にある点を順に出力する.

(iii) 一般に S の凸包を計算するのに $\Omega(n \log n)$ 時間かかることを示せ (整列アルゴリズムの時間複雑さの下界が $\Omega(n \log n)$ であることを利用してよい).

An English Translation:

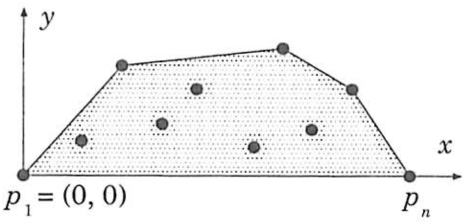
Data Structures and Algorithms

2

Consider the problem of finding the convex hull for a given set $S = \{p_i = (x_i, y_i) \mid 1 \leqq i \leqq n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ such that

$$0 = x_1 < x_i < x_n,\ 0 = y_1 = y_n < y_i,\ 2 \leqq i \leqq n-1;\quad x_i \neq x_j,\ i \neq j.$$

Suppose that any real value can be stored using $O(1)$ space and the algorithm is required to output the corner points on the boundary of the convex hull in clock-wise order from p_1 to p_n. Answer the following questions.



(i) Give an $O(n \log n)$ time algorithm for sorting $p_1, \ldots, p_n$ in the increasing order of x_i.

(ii) Prove that the following algorithm can correctly find the convex hull of S and that it can be implemented so as to have $O(n \log n)$ running time.

Sort $p_1, \ldots, p_n$ in the increasing order of x_i.
Let $q_1, q_2, \ldots, q_n$ denote the result ($q_1 = p_1, q_n = p_n$).
Prepare an empty list L and append q_1, then q_2 to the end of it.
for $k = 3, \ldots, n$ **do**
  Append q_k to the end of L.
  while $|L| \geqq 3$ and the last three points q_i, q_j, q_k in L satisfy $\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \leqq \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j}$ **do**
    Remove the middle point q_j from L.
  end while
end for
Output the points in L in their order in L.

(iii) Prove that in general finding the convex hull of S requires $\Omega(n \log n)$ time. The fact that the time complexity of sorting algorithms is $\Omega(n \log n)$ can be used without proof.