

基礎力学

5

N 個の質点系を考える. i 番目 ($i = 1, \dots, N$) の質点の質量を m_i , 位置ベクトルを \mathbf{x}_i とする. i 番目の質点には他の j 番目 ($j = 1, \dots, N$ で $j \neq i$) の質点により力 $\mathbf{f}_{ij} = -km_i m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}$ が働く. ここで, k は正の定数で, 質点にはそれ以外に力は働かないとする. 以下の問に答えよ.

(i) 全運動量 $\mathbf{P} := \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i$ が保存されることを示せ. ただし, $\dot{\mathbf{x}}_i := \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}$ とする.

(ii) 全角運動量 $\mathbf{L} := \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i$ が保存されることを示せ. ここで, \times は外積を表す.

(iii) 全エネルギー $E := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{km_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$ が保存されることを示せ.

An English Translation:

Basic Mechanics

5

Consider a system of N mass points. The mass and the position vector of the i th mass point are m_i and \mathbf{x}_i , respectively, where $i = 1, \dots, N$. The force $\mathbf{f}_{ij} = -km_i m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}$, where k is a positive constant, is exerted on the i th mass point due to the j th mass point, where $j = 1, \dots, N$ and $j \neq i$. No other forces are applied to the mass points. Answer the following questions.

- (i) Show that the total momentum $\mathbf{P} := \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i$ is conserved, where $\dot{\mathbf{x}}_i := \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}$.
- (ii) Show that the total angular momentum $\mathbf{L} := \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i$ is conserved, where \times denotes the exterior product.
- (iii) Show that the total energy $E := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{km_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$ is conserved.