基礎数学 II

6

$\mathbb{C}^{n\times m}$ で $n\times m$ 複素行列の全体を表す．行列 $A\in\mathbb{C}^{n\times m}$ のエルミート共役を A^* で表す．$H\in\mathbb{C}^{n\times n}$ を正定値エルミート行列とする．以下の問いに答えよ．

(i) H は逆行列をもつが，H^{-1} もまた正定値エルミート行列であることを示せ．

(ii) n の分割 $n=r+s,\ r>0, s>0,$ に応じて，H を次のようにブロック行列に分割する．

$$H=\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

ただし，$A\in\mathbb{C}^{r\times r}, B\in\mathbb{C}^{r\times s}, B^*\in\mathbb{C}^{s\times r}, D\in\mathbb{C}^{s\times s}$．このとき，$A$ も D も正定値エルミート行列であることを示せ．

(iii) 適当な下 3 角行列を左から，上 3 角行列を右からそれぞれかけることにより，$(*)$ の行列は，A を変化させることなくブロック対角行列 (左下と右上のブロックが零行列の形の行列) に変形できることを示せ．

(iv) 次に，$H\in\mathbb{C}^{n\times n}$ の (i,j) 成分を h_{ij} で表すとき，

$$\det H \leqq h_{11}h_{22}\cdots h_{nn}$$

の成り立つことを n に関する数学的帰納法で証明せよ．

(v) $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ を $A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ の形に表す．ただし，$\boldsymbol{a}_k\in\mathbb{C}^n,\ k=1,\ldots,n$．このとき

$$|\det(A)|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}_1\|^2\cdots\|\boldsymbol{a}_n\|^2$$

の成り立つことを示せ．ただし，$\|\boldsymbol{a}_k\|$ は $\boldsymbol{a}_k$ の標準的ノルムを表す．

An English Translation:

Basic Mathematics II

6

Let $\mathbb{C}^{n\times m}$ denote the set of all the $n \times m$ complex matrices. For $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, its Hermitian conjugate is denoted by A^*. Let $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ be a positive-definite Hermitian matrix. Answer the following questions.

(i) The H is invertible because of its positive-definiteness. Show that H^{-1} is also a positive-definite Hermitian matrix.

(ii) According to the division of n such that $n = r + s$, $r > 0, s > 0$, the H is broken up into block matrices, as is shown below,

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

where $A \in \mathbb{C}^{r\times r}, B \in \mathbb{C}^{r\times s}, B^* \in \mathbb{C}^{s\times r}, D \in \mathbb{C}^{s\times s}$. Show that A and D are positive-definite Hermitian matrices as well.

(iii) Show that the above block matrix $(*)$ can be transformed into a block diagonal matrix with A unchanged, by multiplying a suitable lower triangle matrix from the left and a suitable upper triangular matrix from the right, where the block diagonal matrix is a matrix whose upper right and lower left blocks are both zero matrices.

(iv) Let h_{ij} denote the (i, j) component of the positive-definite matrix $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Using the mathematical induction on n, show that

$$\det H \leqq h_{11}h_{22}\cdots h_{nn}.$$

(v) Let $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ be put in the form $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$, where $\boldsymbol{a}_k \in \mathbb{C}^n$, $k = 1, \ldots, n$. Show that

$$|\det(A)|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}_1\|^2 \cdots \|\boldsymbol{a}_n\|^2,$$

where $\|\boldsymbol{a}_k\|$ denotes the standard norm of $\boldsymbol{a}_k$.