現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Ew$$
$$y = Cx$$

で記述される線形システムを考える．ここで a を実数の定数として，行列 A, B, C, E は

$$A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と与える．また x は状態，u は制御入力，w は外成入力，y は観測出力である．行列 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ をゲインとして状態フィードバック $u = Kx$ によって入力を与える．このとき以下の問いに答えよ．

(i) 状態フィードバック $u = Kx$ のもとで，w が y へ全く影響を与えないためには，$C(A + BK)E = 0$ であることが必要十分であることを示せ．

(ii) (i) を満たすフィードバックゲインをすべて求めよ．

(iii) 外成入力が 0，つまり任意の t に関して $w(t) = 0$ とする．(ii) で求めたゲインの中で $t \to \infty$ において $x(t) \to 0$ となるゲインを選べるための定数 a の範囲を求めよ．

(iv) フィードバック入力 $u = Kx$ のもとで，初期条件 $x(0) = x_0$ に関係なく出力が $\dfrac{dy}{dt} = -y$ を満たすようなゲイン K を求めよ．

(v) 外成入力が 0，つまり任意の t に関して $w(t) = 0$ とする．(iv) でのゲインを用いるとき，$t \to \infty$ において $x(t) \to 0$ となるための定数 a の範囲を求めよ．

An English translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

A linear system is described by the state equations

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Ew,$$
$$y = Cx,$$

where the matrices A, B, C, and E are defined as

$$A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a is a real constant, and x is the state, u is the control input, w is the exogenous input, and y is the observation. The input u is given by the state feedback $u = Kx$ where $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ is a gain matrix. Answer the following questions.

(i) Prove that w has no influence on y under the state feedback $u = Kx$ if and only if $C(A + BK)E = 0$.

(ii) Determine the set of feedback gains satisfying the condition in (i).

(iii) Suppose that the exogenous input is 0, *i.e.*, $w(t) = 0$ for all t. Determine the set of a such that there is a feedback gain of the form (ii) satisfying $x(t) \to 0$ as $t \to \infty$ for the closed loop.

(iv) Determine such a feedback gain K that the observation of the closed loop satisfies $\dfrac{dy}{dt} = -y$ for any initial condition $x(0) = x_0$.

(v) Suppose that $w(t) = 0$. Determine the set of a for which the feedback gain of (iv) satisfies $x(t) \to 0$ as $t \to \infty$ for the closed loop.