力学系数学

$\boxed{6}$

$\mathbb{R}^{n\times n}$ における次の微分方程式を考える.

$$\frac{dX}{dt} = CX - X\mathrm{tr}(CX), \quad X(0) = A \tag{$*$}$$

ただし, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は変数行列, $C, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は定数行列で, 特に A は正則行列とする. また, $\mathrm{tr}(Y)$ は行列 $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ のトレースを表し, その定義は $Y = (y_{ij})$ に対し, $\mathrm{tr}(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_{ii}$ である. 以下の問いに答えよ.

(i) もし, $t \to \infty$ のとき $X(t) \to X_0$ となる $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在するなら, $\mathrm{tr}(X_0) = 1$ または $\mathrm{tr}(CX_0) = 0$ の成り立つことを示せ.

(ii) 上の微分方程式 $(*)$ を解け.
[hint] $X = e^{tC}Y$ の形の解があるとして, Y に対する微分方程式をまず導き, さらに, 同様の工夫で Y に対する微分方程式を, スカラー関数に関する微分方程式に帰着させて解く.

(iii) 次に, C は対称行列で, その固有値 c_i は相異なるものとし, $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ のように並べる. また, $c_n > 0$ とする. (ii) で求めた初期値問題 $(*)$ の解を $X(t, A)$ で表す. どのような初期値 A に対して, $t \to \infty$ のとき, $X(t, A)$ はある点 $X_0(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に収束し, $\mathrm{tr}(X_0(A)) = 1$ または $\mathrm{tr}(CX_0(A)) = 0$ が成り立つか.

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Consider the following differential equation on $\mathbb{R}^{n\times n}$,

$$\frac{dX}{dt} = CX - X\mathrm{tr}(CX), \quad X(0) = A, \qquad (*)$$

where $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is a matrix variable, and $C,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ are constant matrices. Further, A is assumed to be non-singular. Here, $\mathrm{tr}(Y)$, the trace of Y, is defined to be $\mathrm{tr}(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_{ii}$ for a matrix $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ with the entries (y_{ij}). Answer the following questions.

(i) Assume that a solution $X(t)$ converges to a matrix $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ as $t \to \infty$. Show that the X_0 satisfies $\mathrm{tr}(X_0) = 1$ or $\mathrm{tr}(CX_0) = 0$.

(ii) Solve the above differential equation $(*)$.
[hint] A first step toward a solution is to assume that there is a solution of the form $X = e^{tC}Y$. If $X = e^{tC}Y$ is inserted, the differential equation will give rise to a differential equation for Y. Further, the differential equation for Y can be reduced to a differential equation for a scalar function.

(iii) Assume that C is a symmetric matrix with distinct eigenvalues c_i such that $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$. Moreover, the assumption that $c_n > 0$ is added. Denote by $X(t, A)$ the solution found in (ii) for the initial value problem $(*)$. For what initial matrices A, does there exist a matrix $X_0(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, depending on A, such that $X(t, A) \to X_0(A)$ as $t \to \infty$ along with either $\mathrm{tr}(X_0(A)) = 1$ or $\mathrm{tr}(CX_0(A)) = 0$?