

## アルゴリズム基礎

2

$V = \{v_i = (a_i, b_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  を  $n$  ( $\geq 2$ ) 個の整数の対の集合とする. 二つの対  $v_j, v_k \in V$  の距離  $d(v_j, v_k)$  を  $|a_j - a_k| + |b_j - b_k|$  と定める. 以下の問いに答えよ.

- (i) 任意の二対  $v_j, v_k \in V$  に対し,  $d(v_j, v_k) = \max\{|(a_j + b_j) - (a_k + b_k)|, |(-a_j + b_j) - (-a_k + b_k)|\}$  が成り立つことを示せ.
- (ii)  $\max_{v_j, v_k \in V} d(v_j, v_k)$  を求める  $O(n)$  時間のアルゴリズムを与えよ.
- (iii) 二対  $v_j, v_k \in V$  に対し, ある整数  $L \geq 1, h, \ell$  があり,  $|a_j - hL| \leq L, |a_k - hL| \leq L, |b_j - \ell L| \leq L, |b_k - \ell L| \leq L$  であれば,  $d(v_j, v_k) \leq 4L$  が成り立つことを示せ.
- (iv) 与えられた整数  $L \geq 1$  に対し,  $d(v_j, v_k) \leq 4L$  である二対  $v_j, v_k \in V$  ( $j \neq k$ ) が存在するかどうかを判定する  $O(n \log n)$  時間のアルゴリズムを与えよ.

An English Translation:

## Data Structures and Algorithms

2

Let  $V = \{v_i = (a_i, b_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  be a set of  $n$  ( $\geq 2$ ) pairs of integers. The distance  $d(v_j, v_k)$  between two pairs  $v_j, v_k \in V$  is defined to be  $|a_j - a_k| + |b_j - b_k|$ . Answer the following questions.

- (i) Prove that, for two pairs  $v_j, v_k \in V$ , it holds that  $d(v_j, v_k) = \max\{|(a_j + b_j) - (a_k + b_k)|, |(-a_j + b_j) - (-a_k + b_k)|\}$ .
- (ii) Give an  $O(n)$ -time algorithm for computing  $\max_{v_j, v_k \in V} d(v_j, v_k)$ .
- (iii) Prove that, for two pairs  $v_j, v_k \in V$ , if there are integers  $L \geq 1$ ,  $h$  and  $\ell$  such that  $|a_j - hL| \leq L$ ,  $|a_k - hL| \leq L$ ,  $|b_j - \ell L| \leq L$  and  $|b_k - \ell L| \leq L$ , then it holds that  $d(v_j, v_k) \leq 4L$ .
- (iv) Give an  $O(n \log n)$ -time algorithm that, for a given integer  $L \geq 1$ , tests whether  $V$  contains pairs  $v_j$  and  $v_k$  ( $j \neq k$ ) such that  $d(v_j, v_k) \leq 4L$  or not.