

## 基礎力学

5

平面内で中心力を受けて運動している質量  $m$  の質点の位置を  $(x(t), y(t))$ , その極座標表示を  $(r(t), \phi(t))$  とする. 但し, 力の中心を座標原点とし,  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  を満足する. 以下の問いに答えよ.

- (i) 速度  $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$  を極座標表示  $(r, \phi)$  で表せ.
- (ii) 加速度  $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$  を極座標表示  $(r, \phi)$  で表せ.
- (iii)  $r^2 \frac{d\phi}{dt}$  が時刻  $t$  に依らず, 一定値であることを示せ.
- (iv)  $h = r^2 \frac{d\phi}{dt}$  とおく. 中心力が  $\frac{m\mu}{r^2}$  の大きさの引力 ( $\mu$  は正の定数) である時, 力学的エネルギー  $E$  を求め, 運動が  $0 < t < \infty$  で有界であるための力学的エネルギー  $E$  の取りうる範囲を求めよ. 但し,  $K$  を運動エネルギーとし, 実効ポテンシャルエネルギー  $U = E - K$  が,  $r \rightarrow \infty$  の時  $U \rightarrow 0$  を満足するように  $E$  を規準化する.

An English Translation:

## Basic Mechanics

5

Consider the planer motion of a particle with the mass  $m$  subject to a central force. Let  $(x(t), y(t))$  be the position and let  $(r(t), \phi(t))$  be the polar coordinates such that  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$  and  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Let the center of the force be the origin of the coordinate system. Answer the following questions.

- (i) Write the velocity  $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$  in terms of the polar coordinates  $(r, \phi)$ .
- (ii) Write the acceleration  $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$  in terms of the polar coordinates  $(r, \phi)$ .
- (iii) Show that  $r^2 \frac{d\phi}{dt}$  is a constant of motion.
- (iv) Let  $h = r^2 \frac{d\phi}{dt}$ . Suppose that the central force is an attractive force of the magnitude  $\frac{m\mu}{r^2}$  with a constant  $\mu(> 0)$ . Obtain the mechanical energy  $E$  and find the condition of  $E$  for the motion to be bounded for  $0 < t < \infty$ . Here  $E$  is determined such that the effective potential energy  $U = E - K$  satisfies the relation  $U \rightarrow 0$  as  $r \rightarrow \infty$ , where  $K$  is the kinetic energy.