

基礎数学 II

6

$A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 実対称行列とし、任意の非零な n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x} (\neq \mathbf{0})$ とその転置 \boldsymbol{x}^\top によって定まる 2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$ は正であるとする。以下の問いに答えよ。

- (i) 行列 A の対角成分 a_{ii} ($i = 1, \dots, n$) は全て正であることを示せ。
- (ii) 行列 A の固有値 λ_i ($i = 1, \dots, n$) は全て正であることを示せ。
- (iii) 行列 A は正則であることを示せ。
- (iv) $n \geq 3$ のとき行列 A の第 i_1, i_2, \dots, i_r 行, 第 i_1, i_2, \dots, i_r 列 ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$) を取り出して作った $r \times r$ ($1 < r < n$) 行列 A_r について考える。例えば, $r = 2$ のとき

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} \end{pmatrix}$$

である。任意の非零な r 次元実ベクトル \boldsymbol{x}_r によって定まる 2 次形式 $\boldsymbol{x}_r^\top A_r \boldsymbol{x}_r$ は正であることを示せ。

- (v) 任意の $n \times n$ ($n \geq 2$) 実行列 B に対して $B^\top B$ は実対称行列となる。 $B^\top B = (b_{ij})$ とおき, 対角成分 b_{ii} ($i = 1, \dots, n$) は全て正であると仮定する。そのような B に対して, 任意の非零な n 次元実ベクトル \boldsymbol{x} について 2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top B^\top B \boldsymbol{x}$ は正となるか, 理由をつけて答えよ。

An English Translation:

Basic Mathematics II

6

Let $A = (a_{ij})$ be an $n \times n$ real symmetric matrix. Let the quadratic form $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ be positive, where \mathbf{x} is any nonzero n -dimensional vector and \mathbf{x}^\top is the transpose of \mathbf{x} . Answer the following questions.

- (i) Show that the diagonal elements a_{ii} of the matrix A are all positive.
- (ii) Show that the eigenvalues λ_i of the matrix A are all positive.
- (iii) Show that the matrix A is nonsingular.
- (iv) Let $n \geq 3$. Let A_r be a $r \times r$ ($1 < r < n$) real symmetric matrix defined by extracting the i_1 th, i_2 th, \dots , i_r th rows and the i_1 th, i_2 th, \dots , i_r th columns ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$) from the $n \times n$ matrix A . For example,

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} \end{pmatrix}$$

for $r = 2$. Show that the quadratic form $\mathbf{x}_r^\top A_r \mathbf{x}_r$ is positive for any nonzero r -dimensional vector \mathbf{x}_r .

- (v) The matrix $B^\top B = (b_{ij})$ is real symmetric for any $n \times n$ ($n \geq 2$) real matrix B . Suppose that the diagonal elements b_{ii} of $B^\top B$ are all positive. Is the quadratic form $\mathbf{x}^\top B^\top B \mathbf{x}$ positive for such B and for any nonzero n -dimensional vector \mathbf{x} ? Give a reason for the answer.