

## 物理統計学

5

$X$  を尺度母数  $\gamma (> 0)$  のコーシー分布に従う無限区間  $(-\infty, \infty)$  上の実数値確率変数とし、その確率密度関数は  $\rho_\gamma(x) = \frac{\gamma}{\pi(x^2 + \gamma^2)}$  で与えられるものとする。以下の問いに答えよ。

- (i) 変換  $Y = \frac{1}{X}$  で定義される確率変数  $Y$  も、尺度母数  $\gamma' = \frac{1}{\gamma}$  のコーシー分布  $\rho_{\gamma'}(x)$  に従うことを示せ。
- (ii) 変換  $Z = \frac{1}{2} \left( X - \frac{1}{X} \right)$  で定義される確率変数  $Z$  も、尺度母数  $\gamma'' = \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right)$  のコーシー分布  $\rho_{\gamma''}(x)$  に従うことを示せ。
- (iii) 漸化式  $X_{n+1} = \frac{1}{2} \left( X_n - \frac{1}{X_n} \right)$ ,  $X_0 = X$  で定まる確率変数  $X_n$  の確率密度関数  $p_n(x)$  は、任意の  $\gamma > 0$  に対して、 $n \rightarrow \infty$  の時、標準コーシー分布の確率密度関数  $\rho_1(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}$  に収束することを示せ。

An English Translation:

## Physical Statistics

5

Let  $X$  be a real-valued random variable over the infinite interval  $(-\infty, \infty)$  obeying the Cauchy distribution with the scale parameter  $\gamma (> 0)$  whose density function is given by  $\rho_\gamma(x) = \frac{\gamma}{\pi(x^2 + \gamma^2)}$ . Answer the following questions.

- (i) Show that a random variable  $Y$  given by the transformation  $Y = \frac{1}{X}$  also obeys the Cauchy distribution with the scale parameter  $\gamma' = \frac{1}{\gamma}$ .
- (ii) Show that a random variable  $Z$  given by the transformation  $Z = \frac{1}{2} \left( X - \frac{1}{X} \right)$  also obeys the Cauchy distribution with the scale parameter  $\gamma'' = \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right)$ .
- (iii) Show that the probability density function  $p_n(x)$  of a random variable  $X_n (n \geq 0)$  given by the recursion relation  $X_{n+1} = \frac{1}{2} \left( X_n - \frac{1}{X_n} \right)$ ,  $X_0 = X$  converges to the density function of the standard Cauchy distribution  $\rho_1(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}$  as  $n \rightarrow \infty$ , for any  $\gamma > 0$ .