

カーネル法を用いた資産配分関数の構築

山下 信雄*, 吉田 雅基†

2009 年 4 月 15 日

概要

本論文では、様々な資産に投資するときに、現在の経済指標を入力すると、各資産の最適な投資配分を出力する関数を考える。これまでの資産配分に関する多くの研究では、まず対象とする資産の確率分布を推定し、次にその分布に基づいた資産配分問題を定式化し、その問題の解を最適な投資配分として与えている。そのため、個々の状況に応じて投資配分を決めるためには、その状況ごとの確率分布を推定する必要がある。しかし、十分なデータが存在しない状況では、そのデータに基づいて推定された確率分布 (と投資割合) は信頼できない。そこで本論文では、状況ごとのデータに基づいて確率分布を推定してから (その状況に固定された) 資産配分を求めるのではなく、すべてのデータから、状況を入力すると資産配分を出力する関数を求めることを考える。本論文では、そのような関数を資産配分関数とよぶ。最適な資産配分関数を求める問題は無限計画問題として定式化できるが、一般に無限計画問題は非常に難しい問題である。そこで、資産配分関数がある特徴ベクトルの成分の線形結合に制限することにより、無限計画問題を凸 2 次計画問題に変換する。さらにその問題の双対問題を導出し、カーネル法によって、最適な資産配分関数は、特徴ベクトルを陽に表さなくても、カーネル関数を用いて表すことができることを示す。現実のデータを用いて数値実験を行ったところ、提案した資産配分関数による資産運用は、従来の (固定された) 資産配分による資産運用に比べて、低リスクで高い収益を得られることがわかった。

1 はじめに

一般に、株などの金融資産の将来価格は不確実である。そのため、金融資産に投資する際は、収益 (リターン) だけでなく、リスクも考慮する必要がある。そこで、多くの投資家は、ある程度の収益を確保しつつ、リスクをできるだけ小さくなるように、複数の資産に分散して投資を行う。この資産配分をポートフォリオとよび、最適なポートフォリオを数理的に求める問題を資産配分問題とよぶ。本論文では、刻々と変化する経済状況を入力として与えたとき、ポートフォリオを出力する関数を考える。そのような関数を資産配分関数とよぶ。本論文では、既存の資産配分問題を拡張することによって、最適な資産配分関数を求めるモデルを提案する。

まず、提案モデルの基礎となる既存の資産配分問題をいくつか紹介する。資産配分問題においては、リスクをどのように数理的にあらわすかが重要である。Markowitz [10] は、ポートフォリオのリスクをその期待収益率の分散で表し、期待収益率を一定に保ちつつ、分散を最小化する平均・分散モデルを提案した。対象とする金融資産の価格の期待収益率と分散共分散行列が与えられたとき、平均・分散モデルは凸二次計画問題に定式化することができる。そのため、内点法などで解くことができる。Konno と Yamazaki [9] はリスクとして収益率の絶対偏差を用いる平均・絶対偏差モデルを提案した。過去のデータを用いれば、平均・絶対偏差モデ

* 京都大学大学院情報学研究科, nobuo@i.kyoto-u.ac.jp

† 京都大学大学院情報学研究科, y-masaki@amp.i.kyoto-u.ac.jp

ルは線形計画問題に定式化することができるため、平均・分散モデルに比べて少ない計算時間でポートフォリオを構築することができる。リスクを分散や絶対偏差で評価するモデルは、投資家が期待収益率より大きい収益を望ましくないと判断することを前提としている。しかし、通常は、収益が期待収益率より多くなることをリスクとは考えない。そこでより現実的なリスクモデルとして収益率の下方分散や下方絶対偏差をとるモデルが提案されている [7]。一方、実務家の間でよく用いられるリスクに Value at Risk (VaR) がある。定数 $\beta \in (0, 1)$ が与えられたとき、 β -VaR は確率が $1 - \beta$ で起こりうる最悪の損失の中で、最小の損失として定義される。定義より、 β の確率で、損失は β -VaR 以下となることがいえる。たとえば、あるポートフォリオの 0.99 -VaR が 100 万円のときは、そのポートフォリオの損失が 100 万円以上となる確率は 1% であるといえる。VaR は、リスクとして明確な意味を持つため、様々な金融資産の評価に用いられている。しかし、VaR はポートフォリオに対して非凸な関数となるため、VaR を最小とするポートフォリオを求めることは難しい。その欠点を克服するリスクとして、Conditional Value at Risk (CVaR) が考案されている [11]。CVaR は VaR よりも大きな損失を出したときの損失の期待値である。CVaR はポートフォリオに関して凸関数となるため、CVaR を最小化する資産配分問題は凸計画問題として定式化できる。

これまでのポートフォリオに関する研究の多くでは、まず資産配分問題を定式化し、次にその問題の解に基づいてポートフォリオを決定することを提案している。その定式化では、資産価格の確率分布が何らかの手法によって推定されており、リスクが計算できることを前提としている。そのため、得られたポートフォリオは、確率分布を推定した状況（データ）では最適となるが、その状況と異なるときには、最適でないことがありうる。個々の状況ごとに最適なポートフォリオを求めるためには、その状況ごとの確率分布を推定しなければならない。一般に、信頼性の高い確率分布を推定するためには、十分多くのデータが必要である。そのため、十分なデータが存在しない状況における確率分布（とそれに基づいたポートフォリオ）は信頼性の低いものになってしまう。例えば、為替相場に応じて最適なポートフォリオを構成する場合は、為替価格で分類したデータが必要となる。このとき、101 円/1 ドルや 99 円/1 ドルのときのデータはたくさんあっても、100 円/1 ドルのデータはほとんどないということがありうる。101 円/1 ドルや 99 円/1 ドルのときのデータに基づいて計算したポートフォリオは信頼できるが、100 円/1 ドルのときのデータに基づいたポートフォリオは信頼できない。そこで本論文では、状況ごとのデータに基づいて確率分布を推定してから（その状況に固定された）ポートフォリオを求めるのではなく、すべてのデータから、状況を入力するとポートフォリオを出力する関数を求めることを考える。本論文では、そのような関数を資産配分関数とよぶ。

最適な資産配分関数を求める問題は、既存の資産配分問題の自然な拡張として定式化できる。しかし、拡張された問題の決定変数は関数となるため、無限計画問題とよばれる一般には解くことが難しい問題となる。そこで、資産配分関数がある特徴ベクトルの各要素の線形和で表された関数に制限し、過去のデータを用いることによって、無限計画問題を凸 2 次計画問題へと変換する。この凸 2 次計画問題の次元は、特徴ベクトルの次元に一致する。一般に、資産配分関数を柔軟に表現するためには、特徴ベクトルは高次元であることが望ましい。しかし、高次元にすると、凸 2 次計画問題も大規模な問題になってしまう。そこで、その凸 2 次計画問題のラグランジュ双対問題を考える。4 節で示すように、双対問題の次元は、特徴ベクトルの次元とは関係なく、資産数とデータの数に比例する。双対問題の解とカーネル法を用いれば、特徴ベクトルを陽に計算することなく、カーネル関数の線形和として資産配分関数を表すことができる。

本論文の構成は以下のとおりである。2 節では既存の資産配分問題として平均・下方絶対偏差モデルと CVaR 最小化モデルを紹介する。3 節では下方絶対偏差または CVaR を最小とする資産配分関数を求める問題を定式化する。4 節では、3 節で定式化した問題のラグランジュ双対問題を導出し、双対問題の解とカーネル法を用いることによって、資産配分関数がカーネル関数の和で表されることを示す。5 節では実際のデータ

を用いた数値実験結果を報告する。最後に、6 節ではまとめと今後の課題について述べる。

2 平均・下方絶対偏差モデルと CVaR 最小化モデル

この節では、提案モデルの基礎となる平均・下方絶対偏差モデル [8] と CVaR 最小化モデル [11] を紹介する。まず、一般の資産配分問題の定式化を与える。 n 種の資産 S_j に投資することを考える。各資産のポートフォリオを $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ とする。以下では空売りを考えない。このとき、ポートフォリオ $\mathbf{y}$ は

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

を満たさなければならない^{*1}。ただし、 $\sum_{j=1}^n y_j < 1$ のときは、現金を割合 $1 - \sum_{j=1}^n y_j$ で保持していることを意味している。 S_j の収益率を R_j とすると、ポートフォリオ $\mathbf{y}$ の収益率 $R(\mathbf{y})$ は

$$R(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n R_j y_j$$

で表される。ここで R_j は確率変数であるため、 $R(\mathbf{y})$ も確率変数となる。以下では、期待収益をある値以上確保しつつリスクを最小化するモデルを考える。リスクを表す関数を $u(\mathbf{y})$ とし、最低限確保する期待収益を γ とすると、このモデルは次のように定式化できる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && u(\mathbf{y}) \\ & \text{subject to} && y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & && \sum_{i=1}^n y_i \leq 1 \\ & && \sum_{i=1}^n E[R_i] y_i \geq \gamma \end{aligned} \tag{1}$$

ただし、 $E[\cdot]$ は確率変数の期待値である。

資産配分問題ではリスクを表す関数 $u(\mathbf{y})$ の定義が重要であり、これまでに様々なものが提案されている。Markowitz [10] はリスクとしてポートフォリオの分散を用いた平均・分散モデルを提案している。リスクとして、下方絶対偏差や CVaR を用いるモデルの詳細を以下で説明する。

2.1 平均・下方絶対偏差モデル

Konno と Yamazaki [9] は、リスクとして次に定義される絶対偏差 u_a を用いる平均・絶対偏差モデルを提案した。

$$u_a(\mathbf{y}) = E \left[\left| \sum_{i=1}^n R_i y_i - E \left[\sum_{i=1}^n R_i y_i \right] \right| \right]$$

このモデルの最も大きな利点は、Markowitz の平均・分散モデル [10] が 2 次計画問題として定式されるのに対し、このモデルは線形計画問題として定式化されることである。

^{*1} 以下の議論は、ある凸多面体集合 $Y \subseteq R^n$ に対して、 $\mathbf{y} \in Y$ と一般化しても成り立つ。

平均・絶対偏差モデルでは、実際の収益が期待収益 $\sum_{i=1}^n E[R_i]y_i$ を越えることもリスクとして扱っている。これは通常の投資家の感覚とはずれたものである。そこで収益が期待収益やある目標を下回るときのみをリスクとするモデルが提案されている [8]。いま、 α を収益率の目標とする。 α を確率変数にとることもできる。このとき収益率 $R(\mathbf{y})$ の下方絶対偏差 u_l は以下のように定義される。

$$u_l(\mathbf{y}) = E[\max\{0, \alpha - R(\mathbf{y})\}]$$

α としては、 $R(\mathbf{y})$ の期待収益 (定数) や、ベンチマークとなる資産の収益 (確率変数) などが挙げられる。下方絶対偏差をリスクとしてもつ資産配分問題 (1) は平均・下方絶対偏差モデルとよばれている。

収益率 R_i の確率分布は一般には未知であるため、 $R(\mathbf{y})$ の期待値や下方絶対偏差を計算することは難しい。そこで、それらを過去のデータから計算された推定値で代用することが提案されている。時刻 t における資産 i の価格を s_i^t とする。このとき、過去の時刻 $t(t = 1, \dots, T)$ における確率変数 R_i の実測値 r_i^t は

$$r_i^t = \frac{s_i^{t+1} - s_i^t}{s_i^t} \quad (2)$$

与えられる。実測値 r_i^t を用いれば、確率変数 R_i の期待値と下方絶対偏差は以下のように近似できる。

$$\begin{aligned} E[R_i] &\approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \\ u_l(\mathbf{y}) &\approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \max\left\{0, \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t y_i\right\} \end{aligned}$$

ただし、 α^t は時刻 t における α の実測値である。 $(\alpha$ が定数のときは $\alpha^t = \alpha$ である。)

過去のデータを用いた近似式を用いると、平均・下方絶対偏差モデルは以下のようにかける。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \max\left\{0, \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t y_i\right\} \\ &\text{subject to} \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ &\quad \sum_{i=1}^n y_i \leq 1 \\ &\quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t y_i \geq \gamma \end{aligned}$$

人為変数 $\boldsymbol{\eta} \in R^T$ を導入すると、この問題は次の線形計画問題に変換できる。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \eta^t \\ &\text{subject to} \quad \eta^t \geq \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t y_i, \quad t = 1, \dots, T \\ &\quad \eta^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\ &\quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ &\quad \sum_{i=1}^n y_i \leq 1 \\ &\quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t y_i \geq \gamma \end{aligned} \quad (3)$$

この問題 (3) を解いて得られるポートフォリオ $\mathbf{y}$ はデータ集合 $\{r_i^t\}$ に依存しているため、ある経済状況に合わせたポートフォリオ $\mathbf{y}$ を求めるためには、データ集合 $\{r_i^t\}$ はその状況にあったものでなければならない。

2.2 CVaR 最小化モデル

投資する資産の収益率 $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ とポートフォリオ $\mathbf{y}$ が与えられたときの損失関数を $f(\mathbf{y}, \mathbf{R})$ とする。よく用いられる損失関数として、 $f(\mathbf{y}, \mathbf{R}) = -\sum_{i=1}^N R_i y_i$ がある。以下では簡単のため、 $f(\mathbf{y}, \mathbf{R}) = -\sum_{i=1}^N R_i y_i$ の場合のみを考える。

損失 $f(\mathbf{y}, \mathbf{R})$ は確率変数 $\mathbf{R}$ に従うため、損失も確率変数である。損失の分布関数を $\Phi(\cdot|\mathbf{y})$ とする。

$$\Phi(v|\mathbf{y}) = P(f(\mathbf{y}, \mathbf{R}) \leq v)$$

$\Phi(v|\mathbf{y}) \geq \beta$ ということは、損失が v 以上となる確率が $1 - \beta$ 以下であることを意味している。分布関数値 $\Phi(v|\mathbf{y})$ が β 以上となる損失の中で最小の損失を VaR といい、 $u_{\text{VaR}}(\mathbf{y}; \beta)$ とあらわす。

$$u_{\text{VaR}}(\mathbf{y}; \beta) = \min\{v \mid \Phi(v|\mathbf{y}) \geq \beta\}$$

例えば、ポートフォリオ $\mathbf{y}$ の $u_{\text{VaR}}(\mathbf{y}; 0.99)$ が 0.2 であれば、ポートフォリオ $\mathbf{y}$ の価値が 20% 以上下がる可能性は 1% 以下であることがいえる。

$u_{\text{VaR}}(\mathbf{y}; \alpha)$ は $\mathbf{y}$ に関して凸関数にならない。そこで、VaR と関連し、よりよい性質をもったリスクとして CVaR が提案されている [11]。CVaR は、VaR 以上の損失の期待値として定義される。以下では CVaR を $u_{\text{CVaR}}(\mathbf{y}; \beta)$ とあらわす。

$$u_{\text{CVaR}}(\mathbf{y}; \beta) = u_{\text{VaR}}(\mathbf{y}; \beta) + \frac{1}{1-\beta} E[\max\{0, f(\mathbf{y}, \mathbf{R}) - u_{\text{VaR}}(\mathbf{y}; \beta)\}]$$

なお、CVaR は

$$u_{\text{CVaR}}(\mathbf{y}; \beta) = \min_v F(\mathbf{y}, v; \beta)$$

となるため [11]、VaR を計算しなくても計算できる。ただし、

$$F(\mathbf{y}, v; \beta) = v + \frac{1}{1-\beta} E[\max\{0, f(\mathbf{y}, \mathbf{R}) - v\}]$$

である。よって、CVaR をリスクとした資産配分問題は

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{v, \mathbf{y}} \quad v + \frac{1}{1-\beta} E[\max\{0, f(\mathbf{y}, \mathbf{R}) - v\}] \\ & \text{subject to} \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & \quad \sum_{i=1}^n y_i = 1 \\ & \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n E(R_i) y_i \geq \gamma \end{aligned} \tag{4}$$

とかける。ここで決定変数は $\mathbf{y}$ と v である。

一般には R_i の確率分布が未知であるため、CVaR を計算することは難しい。そこで、下方絶対偏差と同様に過去のデータを用いて計算された推定値で代用することが提案されている [11]。 r_i^t を、過去の時刻

$t(t = 1, \dots, T)$ での確率変数 R_i の実測値とする。このとき,

$$F(\mathbf{y}, v; \beta) = v + \frac{1}{(1 - \beta)T} \sum_{t=1}^T \max\{f(\mathbf{y}, \mathbf{r}^t) - v\}$$

と近似できる。ただし, $\mathbf{r}^t = (r_1^t, \dots, r_n^t)^\top$ である。過去のデータを用いたこの近似式を用いると, CVaR 最小化モデルは以下のようにかける。

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{v, \mathbf{y}} \quad & v + \frac{1}{(1 - \beta)T} \sum_{t=1}^T \max\{0, f(\mathbf{y}, \mathbf{r}^t) - v\} \\ \text{subject to} \quad & y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n y_i \leq 1 \\ & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t y_i \geq \gamma \end{aligned}$$

損失関数が $f(\mathbf{y}, \mathbf{R}) = -\sum_{i=1}^n R_i y_i$ であるとき, この問題は次の線形計画問題と等価である。

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{v, \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}} \quad & v + \frac{1}{(1 - \beta)T} \sum_{t=1}^T \eta^t \\ \text{subject to} \quad & \eta^t \geq -\sum_{i=1}^n r_i^t y_i - v, \quad t = 1, \dots, T \\ & \eta^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n y_i \leq 1 \\ & \sum_{i=1}^n r_i^t y_i \geq \gamma \end{aligned} \tag{5}$$

3 最適な資産配分関数を求める問題

本節では過去のデータを用いて, 経済状況に応じた最適な資産配分を与える資産配分関数をもとめるモデルを提案する。

以下では, n 種の資産のポートフォリオを考える。資産 i に対して経済指標 $\mathbf{X}_i$ と収益率 R_i が与えられているとする。 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \dots, \mathbf{X}_n^\top)^\top$, $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^\top$ とする。さらに, $\mathbf{X}_i$ の集合を $\Omega_{\mathbf{X}_i}$, $\mathbf{X}$ の集合を $\Omega_{\mathbf{X}}$ とする。例えば, $\mathbf{X}_i$ として, 為替相場, 業種インデックス, 資産 i の価格や取引量などが考えられる。ここでは, $\mathbf{X}_i$ は現在得られる経済の情報であり, R_i は将来の収益率であることを想定しているが, 以下ではどちらも確率変数として扱う。

関数 $g_i : \Omega_{\mathbf{X}_i} \rightarrow [0, 1]$ を資産 i の投資配分を与える関数とし, $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = (g_1(\mathbf{X}_1), \dots, g_n(\mathbf{X}_n))$ とする。現在の経済指標 $\mathbf{X} \in \Omega_{\mathbf{X}}$ が与えられたとき, ポートフォリオ $\mathbf{y}$ は $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ を用いて

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top = \left(g_1(\mathbf{X}_1), \dots, g_n(\mathbf{X}_n) \right)^\top \tag{6}$$

とする。以下では関数 g を資産配分関数とよぶ。

まず、下方絶対偏差を最小化する資産配分関数 g を求める問題を定式化する。平均・下方絶対偏差モデルに (6) を代入すると、

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && E \left[\max \left\{ 0, \alpha - \sum_{i=1}^n R_i g_i(\mathbf{X}_i) \right\} \right] \\
& \text{subject to} && g_i(\mathbf{X}_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall \mathbf{X} \subseteq \Omega_X \\
& && \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{X}_i) \leq 1, \quad \forall \mathbf{X} \subseteq \Omega_X \\
& && E \left[\sum_{i=1}^n R_i g(\mathbf{X}_i) \right] \geq \gamma
\end{aligned} \tag{7}$$

を得る。ここで、問題 (7) の決定変数は関数 g である。問題 (7) は以下の理由で通常は解くことができない難しい問題となる。

- 一般に $(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ の確率分布は未知なため、問題中の期待値が計算できない。
- 決定変数 g は関数であり、制約条件は無数に存在するため、問題 (7) は無限計画問題となる。

以下では、問題 (7) を扱えるように近似したモデルを導出する。まず、下方絶対偏差モデル (3) の導出と同様に、過去のデータを用いて期待値を近似する。

いま、過去の時刻 $t = 1, \dots, T, T+1$ において実現した経済指標 $\mathbf{x}_i^t$ および資産価格 s_i^t が与えられているとする。このとき、時刻 $t+1$ における資産 i の実現した収益率 r_i^t を

$$r_i^t = \frac{s_i^{t+1} - s_i^t}{s_i^t}$$

とする。これを用いると、

$$E \left[\max \left\{ 0, \alpha - \sum_{i=1}^n R_i g_i(\mathbf{X}_i) \right\} \right] \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \max \left\{ 0, \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t g_i(\mathbf{x}_i^t) \right\}$$

と近似できる。同様に問題 (7) の制約条件は

$$\begin{aligned}
& g_i(\mathbf{x}_i^t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T \\
& \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{x}_i^t) \leq 1, \quad t = 1, \dots, T \\
& \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t g_i(\mathbf{x}_i^t) \geq \gamma
\end{aligned}$$

と近似できる。

以上をまとめると、ポートフォリオの収益率の下方絶対偏差を最小化する投資配分関数 g を求める問題は、

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{t=1}^T \max\{0, \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t g_i(\mathbf{x}_i^t)\} \\
& \text{subject to} && g_i(\mathbf{x}_i^t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n : t = 1, \dots, T \\
& && \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{x}_i^t) \leq 1, \quad t = 1, \dots, T \\
& && \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{x}_i^t) \geq \gamma
\end{aligned} \tag{8}$$

と表せる。この問題の制約条件の数は有限である。しかし、決定変数は関数 g のままであるため、まだ容易に扱うことはできない。そこで、求める関数の形を制限することで、問題 (8) を決定変数の数が有限な問題に帰着することを考える。

いま ϕ_i を経済指標の空間 $\Omega_{\mathbf{X}_i}$ から R^{l_i} への非線形な写像とする。 ϕ_i の次元 l_i は、 $l_i = \infty$ としてもよい。このような ϕ_i を特徴ベクトルという。資産配分関数 $g_i(\mathbf{X}_i)$ は特徴ベクトル ϕ_i とパラメータ $\mathbf{w}_i \in R^{l_i}$ を用いて

$$g_i(\mathbf{X}_i) = \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle \tag{9}$$

という形で表されると仮定する。

Remark 1 $b_i \in R$ を用いて $g_i(\mathbf{X}_i) = \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle + b_i$ とすることもできる。以下での議論は、このような場合にも容易に拡張できる。

この制限 (9) を加えると、問題 (8) は次の有限な変数 $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1^\top, \dots, \mathbf{w}_n^\top)^\top$ を求める問題となる。

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{t=1}^T \max\{0, \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle\} \\
& \text{subject to} && \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \geq 0, \quad i = 1, \dots, n : t = 1, \dots, T \\
& && \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \leq 1, \quad t = 1, \dots, T \\
& && \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \geq \gamma
\end{aligned}$$

この問題は、人為変数 $\boldsymbol{\eta} = (\eta^1, \dots, \eta^T)^\top$ を導入すると、次の線形計画問題に変換できる。

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{t=1}^T \eta^t \\
& \text{subject to} && \eta^t \geq \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle, \quad t = 1, \dots, T \\
& && \eta^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\
& && \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \\
& && \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \leq 1, \quad t = 1, \dots, T \\
& && \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \geq \gamma
\end{aligned} \tag{10}$$

問題 (10) は過去のデータに対して最適な関数 $\mathbf{g}$ を学習する学習問題と考えることができる^{*2}。データ数に比べて、特徴ベクトルの次元 l_i が大きいときは、 $\boldsymbol{\eta} = 0$ 、つまり、収益率 $\sum_{i=1}^n r_i^t g_i(\mathbf{x}_i^t)$ が過去のすべての時刻 t において目標 α^t よりも大きくなることもある。この現象を、機械学習の分野では過学習とよぶ。過学習が起きると、過去のデータには有効であるが、将来起こりうる未知の状況には適合しない、つまり、将来の資産運用成績が悪くなることもある。機械学習の分野において、過学習を制御するためによく用いられる手法の一つに正則化がある [2]。これは目的関数に正則化項を付加することにより、過学習を防ぐという手法である。そのような正則化項として様々なものが存在するが、ここでは $\tau \sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\|^2$ を用いることにする。ただし、 τ は過学習を制御する正のパラメータである。問題 (10) にこの正則化項を付加した問題は次のようにかける。

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \tau \sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\|^2 + \sum_{t=1}^T \eta^t \\
& \text{subject to} && \eta^t \geq \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle, \quad t = 1, \dots, T \\
& && \eta^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\
& && \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n \\
& && \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \leq 1, \quad t = 1, \dots, T \\
& && \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \geq \gamma
\end{aligned} \tag{11}$$

この問題は凸 2 次計画問題である。この問題を解いて得られた解を $\mathbf{w}^*$ とすると、資産配分関数 $g_i(\mathbf{X}_i)$ は次のようにかくことができる。

$$g_i(\mathbf{X}_i) = \langle \mathbf{w}_i^*, \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle$$

Remark 2 問題 (11) の制約条件は $t = 1, \dots, T$ の過去のデータに対しては成り立つが、過去のデータと異なる $\mathbf{X} \subseteq \Omega_X$ に対して $g_i(\mathbf{X}_i) \geq 0$ 、 $\sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{X}_i) \leq 1$ が成り立つとは限らない。そのため、実際の資産運用では適当な変換が必要となる。例えば、 $g_i(\mathbf{X}_i) < 0$ となった場合は $g_i(\mathbf{X}_i) = 0$ とし、 $\sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{X}_i) > 1$ となった場合は各資産への投資割合を保ちながら $\sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{X}_i) = 1$ となるように正規化することが考えられる。

^{*2} 通常の CVaR 最小化モデルと機械学習の関係は [5] でも議論されている。

次に CVaR を最小にする資産配分関数 $\mathbf{g}$ を求める問題を定式化する．CVaR 最小化モデル (4) に (6) を代入すると、

$$\begin{aligned}
& \text{minimize}_{v, \mathbf{g}} \quad v + \frac{1}{(1-\beta)} E [\max\{0, f(\mathbf{g}(\mathbf{X}), \mathbf{R}) - v\}] \\
& \text{subject to} \quad g_i(\mathbf{X}_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall \mathbf{X} \subset \Omega_{\mathbf{X}} \\
& \quad \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{X}_i) \leq 1, \quad \forall \mathbf{X} \subset \Omega_{\mathbf{X}} \\
& \quad E \left[\sum_{i=1}^n R_i g_i(\mathbf{X}_i) \right] \geq \gamma
\end{aligned} \tag{12}$$

を得る．この問題も絶対下方偏差モデル (7) と同様の難しさを有する．そこで、問題 (11) を導出したときと同様に、過去のデータを用い、関数 $\mathbf{g}$ に制限を加えることによって、容易に扱える問題に変換する．問題 (10) の導出と前節の CVaR 最小化モデル (5) の導出を参考にすれば、問題 (12) は近似的に、

$$\begin{aligned}
& \text{minimize}_{v, \mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}} \quad \tau \sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\|^2 + v + \frac{1}{(1-\beta)T} \sum_{t=1}^T \eta^t \\
& \text{subject to} \quad \eta^t \geq - \sum_{i=1}^n r_i^t \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle - v, \quad t = 1, \dots, T \\
& \quad \eta^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\
& \quad \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T \\
& \quad \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \leq 1, \quad t = 1, \dots, T \\
& \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \geq \gamma
\end{aligned} \tag{13}$$

とあらわすことができる．ただし、目的関数の第 1 項は、過学習を制御するための正則化項である．

4 提案モデルの双対問題とカーネル関数を用いた解表現

前節で定式化した問題 (11) と問題 (13) を解くためには、すべてのデータ $\mathbf{x}_i^t$ に対して特徴ベクトル ϕ_i の関数値を具体的に求める必要がある．特徴ベクトル ϕ_i が高次元であったり、無限次元である場合には、(11) や (13) は大規模、または無限次元の最適化問題となり、容易に解くことができない．そこで本節では問題 (11) と問題 (13) の双対問題を考える．その双対問題の決定変数の数は $T \times n$ に比例する．さらに、 $\phi_i(x)$ を陽に計算しなくても、カーネル法を使うことによって、資産配分関数 $g_i(\mathbf{X}_i)$ がカーネル関数の和で表せることを示す．

まず、下方絶対偏差を最小化する問題 (11) の双対問題を導く．問題 (11) のラグランジュ関数は次のように

かける [4].

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \xi) = & \tau \sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\|^2 + \sum_{t=1}^T \eta^t + \sum_{t=1}^T \kappa^t \left\{ \alpha^t - \sum_{i=1}^n r_i^t \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle - \eta^t \right\} \\
& - \sum_{t=1}^T \lambda^t \eta^t - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \mu_i^t (\langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle) + \sum_{t=1}^T \nu^t \left(\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle - 1 \right) \\
& + \xi \left\{ \gamma - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t \langle \mathbf{w}_i, \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \rangle \right\}
\end{aligned} \tag{14}$$

ここで, $\boldsymbol{\kappa} \in R^T, \boldsymbol{\lambda} \in R^T, \boldsymbol{\mu} \in R^{T \times n}, \boldsymbol{\nu} \in R^T, \xi \in R$ は問題 (11) の各制約に対応したラグランジュ乗数である. なお, $\boldsymbol{\mu}$ は $\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_i^1, \dots, \mu_i^T)^\top$ を用いて, $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\mu}_n^\top)^\top$ と表される.

いま, ラグランジュ関数 L を用いて, 関数 $\omega: R^{\{(n+2)T+1\}} \mapsto [-\infty, +\infty)$ を

$$\omega(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \xi) = \inf \{ L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \xi) \mid (\mathbf{w}^\top, \boldsymbol{\eta}^\top)^\top \in R^{n+T} \} \tag{15}$$

と定義すると, 問題 (11) のラグランジュ双対問題は次のようにかかる.

$$\begin{aligned}
& \text{maximize} \quad \omega(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \xi) \\
& \text{subject to} \quad \boldsymbol{\kappa} \geq 0, \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \boldsymbol{\mu} \geq 0, \boldsymbol{\nu} \geq 0, \xi \geq 0
\end{aligned} \tag{16}$$

双対問題の目的関数 ω は以下のように陽に与えることができる.

ラグランジュ関数 L を $\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}$ の項で整理すると,

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \xi) &= \tau \sum_{i=1}^n \|\mathbf{w}_i\|^2 + \sum_{i=1}^n \left\langle \mathbf{w}_i, - \sum_{t=1}^T \kappa^t r_i^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) - \sum_{t=1}^T \mu_i^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) + \sum_{t=1}^T \nu^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) - \frac{\xi}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \right\rangle \\
&+ \sum_{t=1}^T \eta^t (1 - \kappa^t - \lambda^t) + \sum_{t=1}^T \alpha^t \kappa^t - \sum_{t=1}^T \nu^t + \gamma \xi
\end{aligned}$$

とかける. この式は $\mathbf{w}$ と $\boldsymbol{\eta}$ で分解して表されているので双対問題の目的関数値は L を $\mathbf{w}$ と $\boldsymbol{\eta}$ で独立して最小化すれば計算できる. まず, $\mathbf{w}$ について最小化する. L は $\mathbf{w}$ に関して凸 2 次関数であるから,

$$\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \xi) = 0$$

を満たす $\mathbf{w}^*$ が最適解となる.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{w}_i} L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \xi) &= 2\tau \mathbf{w}_i - \sum_{t=1}^T \kappa^t r_i^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) - \sum_{t=1}^T \mu_i^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) + \sum_{t=1}^T \nu^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) - \frac{\xi}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \\
&(i = 1, \dots, n)
\end{aligned}$$

より

$$\mathbf{w}_i^* = \frac{1}{2\tau} \left(\sum_{t=1}^T \kappa^t r_i^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) + \sum_{t=1}^T \mu_i^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) - \sum_{t=1}^T \nu^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) + \frac{\xi}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \phi_i(\mathbf{x}_i^t) \right) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{17}$$

である. 次に $\boldsymbol{\eta}$ について最小化する. L は η^t に関して線形関数であるので

$$\inf \{ \eta^t (1 - \kappa^t - \lambda^t) \mid \eta^t \in R \} = \begin{cases} 0 & (\kappa^t + \lambda^t = 1) \\ -\infty & (\kappa^t + \lambda^t \neq 1) \end{cases}$$

となる。よって、ある t に対して $\kappa^t + \lambda^t \neq 1$ のときは、 $\omega(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \xi) = -\infty$ となる。双対問題は最大化問題であるため、このような領域を考える必要がない。そこで $\kappa^t + \lambda^t = 1$, $t = 1, \dots, T$ の場合のみ考えることとし、双対問題の制約条件に $\kappa^t + \lambda^t = 1$, $t = 1, \dots, T$ を加える。

L に $\kappa^t + \lambda^t = 1$ と $\boldsymbol{w}^*$ を代入して、整理すると、

$$\begin{aligned}\omega(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \xi) &= L(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \xi) \\ &= -\tau \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{w}_i^*\|^2 + \sum_{t=1}^T \alpha^t \kappa^t - \sum_{t=1}^T \nu^t + \gamma \xi\end{aligned}\quad (18)$$

を得る。ここで $\sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{w}_i^*\|^2$ は、

$$\sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{w}_i^*\|^2 = \frac{1}{2\tau} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_n \\ \boldsymbol{\nu} \\ \xi \end{pmatrix}^\top Q \begin{pmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_n \\ \boldsymbol{\nu} \\ \xi \end{pmatrix}\quad (19)$$

と表せる。ただし、 $Q \in R^{\{(n+2)T+1\} \times \{(n+2)T+1\}}$ は

$$Q = \begin{pmatrix} H_0 & R_1 H_1 & \cdots & \cdots & R_n H_n & -\sum_{i=1}^n R_i H_i & \boldsymbol{h} \\ H_1 R_1 & H_1 & 0 & \cdots & 0 & -H_1 & \boldsymbol{p}_1 \\ \vdots & 0 & H_2 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ H_n R_n & 0 & \cdots & 0 & H_n & -H_n & \boldsymbol{p}_n \\ -\sum_{i=1}^n H_i R_i & -H_1 & \cdots & \cdots & -H_n & \sum_{i=1}^n H_i & -\sum_{i=1}^n \boldsymbol{p}_i \\ \boldsymbol{h}^\top & \boldsymbol{p}_1^\top & \cdots & \cdots & \boldsymbol{p}_n^\top & -\sum_{i=1}^n \boldsymbol{p}_i & q \end{pmatrix}\quad (20)$$

となる半正定値行列である。ここで、 R_i は $\boldsymbol{r}_i^t$ を (t, t) 成分にもつ $T \times T$ の対角行列であり、 H_i , $H_0 \in R^{T \times T}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{p}_i \in R^T$, $q \in R$ は $\boldsymbol{r}_i = (r_1^i, \dots, r_T^i)^\top$ を用いて次のように表される行列、ベクトル、スカラーである。

$$\begin{aligned}(H_i)_{kl} &= \frac{\langle \phi_i(\boldsymbol{x}_i^k), \phi_i(\boldsymbol{x}_i^l) \rangle}{2\tau}, \quad H_0 = \sum_{i=1}^n R_i H_i R_i \\ \boldsymbol{h} &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n R_i H_i \boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{p}_i = \frac{1}{T} H_i \boldsymbol{r}_i, \quad q = \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{r}_i^\top H_i \boldsymbol{r}_i\end{aligned}$$

以上より、問題 (11) のラグランジュの双対問題 (16) は以下のようにかける。

$$\begin{aligned}\text{maximize} \quad & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_n \\ \boldsymbol{\nu} \\ \xi \end{pmatrix}^\top Q \begin{pmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_n \\ \boldsymbol{\nu} \\ \xi \end{pmatrix} + \sum_{t=1}^T \alpha^t \kappa^t - \sum_{t=1}^T \nu^t + \gamma \xi \\ \text{subject to} \quad & \kappa^t \geq 0, \lambda^t \geq 0, \kappa^t + \lambda^t = 1, \quad t = 1, \dots, T \\ & \boldsymbol{\mu} \geq 0, \boldsymbol{\nu} \geq 0, \xi \geq 0\end{aligned}$$

ここで、 λ^t を消去し、最大化を最小化に変換すると、

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \kappa \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix}^\top Q \begin{pmatrix} \kappa \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix} - \sum_{t=1}^T \alpha^t \kappa^t + \sum_{t=1}^T \nu^t - \gamma \xi \\
& \text{subject to} \quad 0 \leq \kappa^t \leq 1, \quad t = 1, \dots, T \\
& \quad \mu \geq 0, \quad \nu \geq 0, \quad \xi \geq 0
\end{aligned} \tag{21}$$

を得る。この問題は凸 2 次計画問題である。

求めたい資産配分関数 g は双対問題 (21) の解を用いて、次のように表すことができる。(21) の解を $(\hat{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\xi})$ とすると、(17) より w^* は

$$w_i^* = \frac{1}{2\tau} \left(\sum_{t=1}^T \hat{\kappa}^t r_i^t \phi_i(x_i^t) + \sum_{t=1}^T \hat{\mu}_i^t \phi_i(x_i^t) - \sum_{t=1}^T \hat{\nu}^t \phi_i(x_i^t) + \frac{\hat{\xi}}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \phi_i(x_i^t) \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

となり、資産配分関数 (9) は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
g_i(\mathbf{X}_i) &= \langle w_i^*, \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle \\
&= \frac{1}{2\tau} \left(\sum_{t=1}^T \hat{\kappa}^t r_i^t \langle \phi_i(x_i^t), \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle + \sum_{t=1}^T \hat{\mu}_i^t \langle \phi_i(x_i^t), \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \sum_{t=1}^T \hat{\nu}^t \langle \phi_i(x_i^t), \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle + \frac{\hat{\xi}}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \langle \phi_i(x_i^t), \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle \right) \quad (i = 1, \dots, n)
\end{aligned} \tag{22}$$

Remark 3 3 節の Remark 2 で述べたように、(8) の制約条件は $t = 1, \dots, T$ における過去のデータに対してのみ成り立つので、新しい経済指標 $\mathbf{X}$ に対して $g_i(\mathbf{X}_i) \geq 0$ 、 $\sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{X}_i) \leq 1$ が成り立つわけではない。制約が成り立たないときは、Remark 2 にあるような変換をする必要がある。

双対問題 (21) の行列 Q や式 (22) で与えられた資産配分関数 g には、特徴ベクトル $\phi_i(\mathbf{X}_i)$ が単独には現れておらず、すべてその内積の形で現れている。そこで、その内積をあらわす関数を $K_i : \Omega_{\mathbf{X}_i} \times \Omega_{\mathbf{X}_i} \rightarrow R$ とする。

$$K_i(x_i, z_i) = \langle \phi_i(x_i), \phi_i(z_i) \rangle$$

関数 K_i を用いれば、双対問題 (21) の行列 Q を構成し、最適な資産配分関数を

$$g_i(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{2\tau} \left(\sum_{t=1}^T \hat{\kappa}^t p_i^t K_i(x_i^t, \mathbf{X}_i) + \sum_{t=1}^T \hat{\mu}_i^t K_i(x_i^t, \mathbf{X}_i) - \sum_{t=1}^T \hat{\nu}^t K_i(x_i^t, \mathbf{X}_i) + \frac{\hat{\xi}}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t K_i(x_i^t, \mathbf{X}_i) \right) \tag{23}$$

とあらわすることができる。

逆に $\Omega_{\mathbf{X}_i} \times \Omega_{\mathbf{X}_i}$ から R への関数 K_i を先に決めれば、特徴ベクトル $\phi_i(\mathbf{X}_i)$ を陽に考えなくても、双対問題 (21) の行列 Q を構成できる。しかし、その K_i を用いて表された双対問題 (21) が凸計画問題になったり、(23) で与えられる g が元の問題 (11) の解となることは保証できない。そのことを保証する十分条件は、関数 K_i が以下に定義するカーネル関数となっていることである [1]。

Definition 1 関数 $K: X \times X \rightarrow R$ に対して, ある特徴ベクトル $\phi: X \mapsto F$ が存在し, すべての $x, z \in X$ に対し,

$$K(x, z) = \langle \phi(x), \phi(z) \rangle$$

となるとき, K をカーネル関数という.

特徴ベクトルを直接計算しないで, カーネル関数を用いて最適解を求める手法をカーネルトリックといい, カーネル法における主要な技術のひとつである [1].

よく用いられるカーネル関数として, 次のものがある.

$$K(x, z) = (x^\top z + c)^d \quad (d: \text{自然数}, c \geq 0) \quad (24)$$

$$K(x, z) = \exp\left(-\frac{\|x - z\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (25)$$

(24) を多項式カーネル, (25) をガウスカーネルとよぶ. 多項式カーネルを構成する特徴ベクトルは有限次元であるが, ガウスカーネルを構成する特徴ベクトルは無次元となる.

最後に, CVaR 最小化モデル (13) の双対問題を与える. 問題 (13) のラグランジュ関数は次のようにかける.

$$\begin{aligned} L(w, \eta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi) &= \tau \sum_{i=1}^n \|w_i\|^2 + v + \frac{1}{(1-\beta)T} \sum_{t=1}^T \eta^t + \sum_{t=1}^T \kappa^t \left\{ -\sum_{i=1}^n r_i^t \langle w_i, \phi_i(x_i^t) \rangle - v - \eta^t \right\} \\ &\quad - \sum_{t=1}^T \lambda^t \eta^t - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \mu_i^t (\langle w_i, \phi_i(x_i^t) \rangle) + \sum_{t=1}^T \nu^t \left(\sum_{i=1}^n \langle w_i, \phi_i(x_i^t) \rangle - 1 \right) \\ &\quad + \xi \left\{ \gamma - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_i^t \langle w_i, \phi_i(x_i^t) \rangle \right\} \\ &= \tau \sum_{i=1}^n \|w_i\|^2 + \sum_{i=1}^n \left\langle w_i, -\sum_{t=1}^T \kappa^t r_i^t \phi_i(x_i^t) - \sum_{t=1}^T \mu_i^t \phi_i(x_i^t) + \sum_{t=1}^T \nu^t \phi_i(x_i^t) - \frac{\xi}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \phi_i(x_i^t) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \eta^t \left(\frac{1}{(1-\beta)T} - \kappa^t - \lambda^t \right) + \left(1 - \sum_{t=1}^T \kappa^t \right) v - \sum_{t=1}^T \nu^t + \gamma \xi \end{aligned} \quad (26)$$

ここで, $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi$ は問題 (13) の各制約に対応したラグランジュ乗数である.

ラグランジュ関数は w と η と v で分解して表されているので, 双対問題の目的関数値は L を w, η, v で独立して最小化すれば計算できる. まず, w について最小化する.

$$\begin{aligned} \nabla_{w_i} L(w, \eta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi) &= 2\tau w_i - \sum_{t=1}^T \kappa^t r_i^t \phi_i(x_i^t) - \sum_{t=1}^T \mu_i^t \phi_i(x_i^t) + \sum_{t=1}^T \nu^t \phi_i(x_i^t) - \frac{\xi}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \phi_i(x_i^t) \\ &\quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

であるから,

$$w_i^* = \frac{1}{2\tau} \left(\sum_{t=1}^T \kappa^t r_i^t \phi_i(x_i^t) + \sum_{t=1}^T \mu_i^t \phi_i(x_i^t) - \sum_{t=1}^T \nu^t \phi_i(x_i^t) + \frac{\xi}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \phi_i(x_i^t) \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

を得る.

次に η について最小化を考える． L は η に対して線形であるから，ある t に対して $\kappa^t + \lambda^t \neq \frac{1}{(1-\beta)T}$ のときは，いくらでも小さくできる．そこで $\kappa^t + \lambda^t = \frac{1}{(1-\beta)T}$ ， $t = 1, \dots, T$ の場合のみ考えることとし，双対問題の制約条件に $\kappa^t + \lambda^t = \frac{1}{(1-\beta)T}$ ， $t = 1, \dots, T$ を加える．

同様に， L は ν に対して線形であるから，双対問題の制約条件に $\sum_{t=1}^T \kappa^t = 1$ を加える．

L に $\kappa^t + \lambda^t = \frac{1}{(1-\beta)T}$ ， $\sum_{t=1}^T \kappa^t = 1$ と w^* を代入すると，双対問題の目的関数 $\omega(\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi)$ は

$$\omega(\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi) = L(w^*, \eta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi) = -\tau \sum_{i=1}^n \|w_i^*\|^2 - \sum_{t=1}^T \nu^t + \gamma \xi$$

となる．よって，CVaR 最小化モデル (13) の双対問題は，

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \kappa \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix}^\top Q \begin{pmatrix} \kappa \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix} + \sum_{t=1}^T \nu^t - \gamma \xi \\ & \text{subject to} \quad 0 \leq \kappa^t \leq \frac{1}{(1-\beta)T}, \quad t = 1, \dots, T \\ & \quad \sum_{t=1}^T \kappa^t = 1 \\ & \quad \mu \geq 0, \nu \geq 0, \xi \geq 0 \end{aligned} \tag{27}$$

とかける．ここで行列 Q は (20) で定義された行列である．

CVaR 最小化モデル (13) の解は双対問題 (27) の解 $(\hat{\kappa}, \hat{\mu}, \hat{\nu}, \hat{\xi})$ を用いて，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{X}_i) = & \frac{1}{2\tau} \left(\sum_{t=1}^T \hat{\kappa}^t r_i^t \langle \phi_i(\mathbf{x}_i^t), \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle + \sum_{t=1}^T \hat{\mu}_i^t \langle \phi_i(\mathbf{x}_i^t), \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle \right. \\ & \left. - \sum_{t=1}^T \hat{\nu}^t \langle \phi_i(\mathbf{x}_i^t), \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle + \frac{\hat{\xi}}{T} \sum_{t=1}^T r_i^t \langle \phi_i(\mathbf{x}_i^t), \phi_i(\mathbf{X}_i) \rangle \right) \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{28}$$

CVaR 最小化モデルにおいても，双対問題を定義する行列 Q および資産配分関数 $\mathbf{g}$ は，カーネル関数であることができるため，カーネルトリックを使うことができる．

5 数値実験

この節では，資産配分関数を構築する提案モデル (11) と，今野 [8] の平均・下方絶対偏差モデル (3) との比較を行う．本実験は CPU が Pentium4, 3.2GHz，メモリーが 2GB，OS が fedora7.0 の計算機上で，Matlab7.4 を用いて行った．凸 2 次計画問題を解く際は ILOG Optimization [6] のソルバーを用いた．

実験では，トレーニングデータを用いて 2 種類の金融資産に対するポートフォリオ（資産配分関数）を構築し，テストデータに対する運用成績によって評価をする．まず，提案モデル (11) に適した収益率データの構成方法を調べ (5.1 節)，次に平均・下方絶対偏差モデル (3) との比較をする (5.2 節)．

実験には次のように構成したデータを用いた．まず，2 種類の金融資産として，電力会社 3 社（東京電力，関西電力，中部電力）の平均株価と自動車会社 3 社（トヨタ・日産・ホンダ）の平均株価を用いた．平均した株価

を用いたのは、ある特定企業の株価を用いると、不祥事などその企業固有の要因で株価が変動してしまうからである。以下では電力会社の平均株価を銘柄 1、自動車会社の平均株価を銘柄 2 とよぶことにする。資産配分関数に入力する経済指標には、1 ドルの価格 (円) の変動率を用いた。具体的には、次のように経済指標 x_1^t, x_2^t を決めた。時刻 t における 1 ドルの価格 (円) を d^t としたとき、円ドル相場の変動率 s^t , $t = 1, \dots, T$ を

$$s^t = \frac{d^t - d^{t-1}}{d^{t-1}} \quad (t = 2, \dots, T)$$

$$s^0 = 0$$

と計算する。銘柄 1 に経済指標 x_1^t および銘柄 1 に経済指標 x_2^t は、どちらも直前の 4 期の円ドル相場の変動率とした。

$$x_1^t = x_2^t = (s^{t-1}, s^{t-2}, s^{t-3}, s^{t-4})^\top$$

実験には Yahoo!ファイナンスの株価・投信・為替時系列データ [12] より収集した週足データを用いた。トレーニングデータには 2000 年から 2004 年までの期間 (データ 1) と、2001 年から 2005 年までの期間 (データ 2) を用い、テストデータには 2005-2006 年 (データ 1)、2006-2007 年 (データ 2) を用いた (表 1)。

表 1 実験に用いたデータ

	トレーニングデータ	テストデータ
データ 1	2000-2004 年	2005-2006 年
データ 2	2001-2005 年	2006-2007 年

提案モデル (11) と平均・下方絶対偏差モデル [8] の目標 α^t は $\alpha^t = 0$, $t = 1 \dots, T$ とした。また、提案モデル (11) の正則化パラメータは $\tau = 0.05$ とし、カーネル関数には以下のガウスカーネル (25) を採用した。本実験では σ^2 として、トレーニングデータ x_i^t のノルムの平均を用いた。

5.1 収益率データの構成に対する実験

収益率データ r_i^t としては、(2) で定義されたものを用いるのが普通である。ただし、週足データから r_i^t を計算すると、データ数が少ないとき、以下の実験結果でみられるように提案モデル (11) では過学習がおきることがある。そこで、 r_i^t として 4 週の収益率の平均 (月間の収益率に相当) も考えることにする。以下では、通常の週足の収益率を収益率 1、4 週の収益率の平均を収益率 2 とよぶことにする。

図 1, 2 は $\gamma = 0.0025$ としたときの、収益率 1, 2 に対する提案モデル (11) の運用成績である。これらの図を見ると、 r_i^t として収益率 1 を採用したモデルでは、ほとんど売買がおこなわれていないということがわかる。一方、収益率 2 を用いたモデルでは、資産の増減は激しいが、結果的にはよい運用成績を上げている。このような結果になった要因として以下のことが考えられる。週足のデータを用いた収益率は変動が大きいため、 r_i^t が下限 γ よりも大きな値をとることが頻繁に起こっている。 r_i^t が下限 γ よりも非常に大きな値をとる時刻 t では、少しの投資で γ を超える収益が実現できるため、 $g_i(x_i^t)$ が小さい値となるように学習する。一方、それ以外の時刻では投資を行わないような資産配分関数を学習する。その結果、テストデータに対して、金融資産 (銘柄 1,2) への投資がほとんど行われない。これは、過去のデータに適応しすぎた過学習と考えることができる。この問題を回避するためには、もっと多くのトレーニングデータを用いて学習しなければならない。一方、 r_i^t を 4 週の平均とした場合、 r_i^t は γ と比べてそれほど大きくはならない。このため、目標値

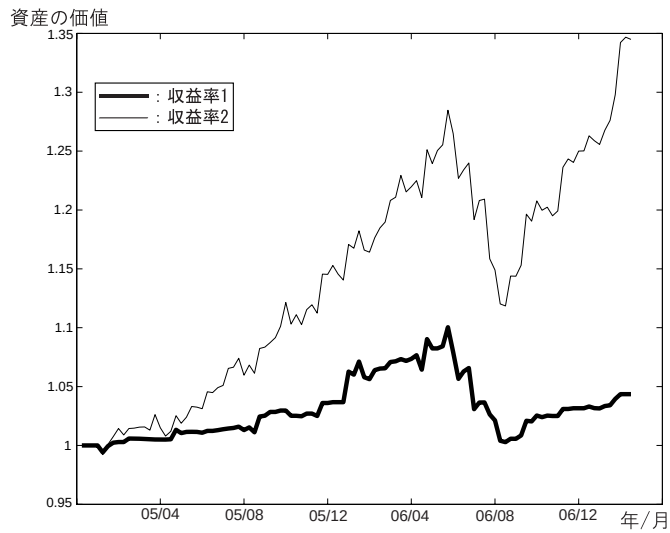


図1 データ1における提案モデルの資産運用成績

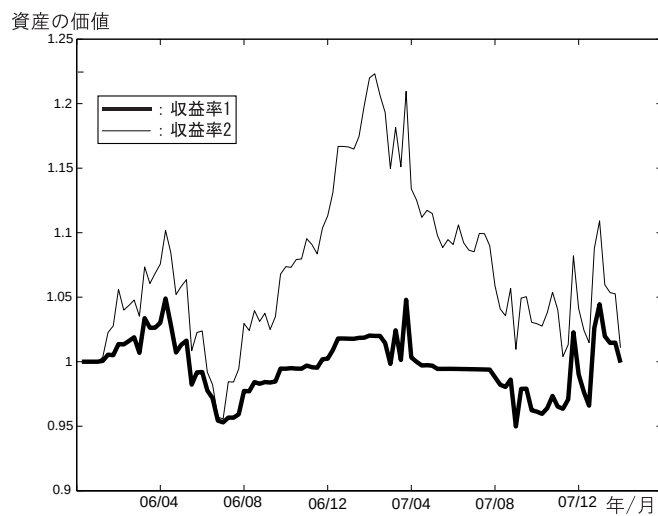


図2 データ2における提案モデルの資産運用成績

γ を実現するために、より多くの時刻において売買するようになり、収益率1と比べて、良い結果が得られたと考えられる。

5.2 下方絶対偏差モデルとの比較実験

次に提案モデル(11)と下方絶対偏差モデル(3)との比較を行う。提案モデルでは、収益率として4週の収益率の平均である収益率2を用いた。

図 3, 4 は $\gamma = 0.0025$ としたときの提案モデルと下方絶対偏差モデルとの運用成績を比較した結果である。

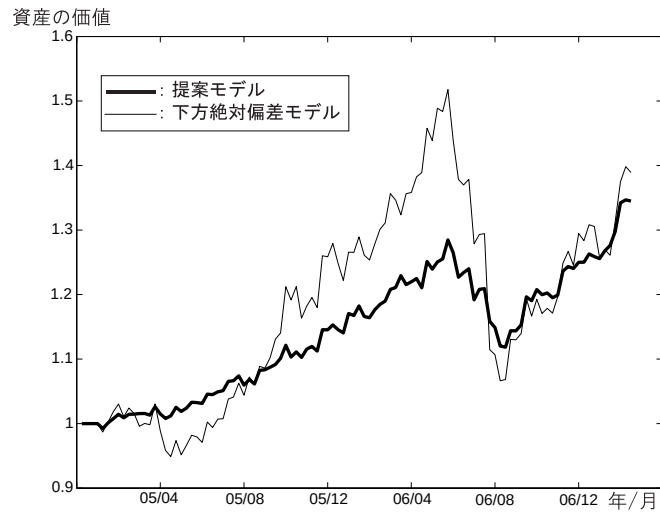


図 3 データ 1 における提案モデルと下方絶対偏差モデルの比較

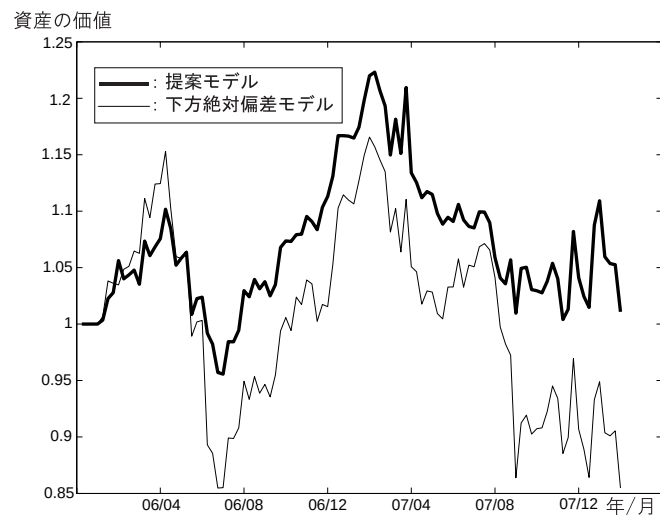


図 4 データ 2 における提案モデルと下方絶対偏差モデルの比較

データ 1 に対しては、提案モデルは、下方絶対偏差モデルと比べ、得られた収益では劣っているが、資産の増減が少なく、低リスクで資産運用を行っていることがわかる。一方、データ 2 においては、提案モデルは、収益率、資産変動ともに、よりよい資産運用を行っていることがわかる。データ 2 では、トレーニングデータ期間において銘柄 2 の株価は上昇しているが、テストデータ期間では大幅に下落している。下方絶対偏差モデルでは、テストデータ期間にポートフォリオの入れ替えが行われないため、トレーニングデータに依存したポートフォリオを持ち続け、悪い運用結果となっている。一方、提案モデルでは、為替相場に応じて、ポート

フォリオの入れ替えが行われているため、株価が下落する局面においても、あまり悪い結果にはなっていない。

次に要求する期待収益率 γ を様々な値に変えた場合のポートフォリオ (資産配分関数) の運用成績を調べる。具体的には γ を 0.0005 から 0.0030 の間で 11 個作成し、それぞれの γ に対して得られたポートフォリオ (資産配分関数) のテストデータに対する運用成績を計算し、その週足の収益率の平均と標準偏差の関係をみる。

図 5, 6 に、データ 1, 2 に対する結果を与える。これらの図を見ると、提案モデルは下方絶対偏差モデル

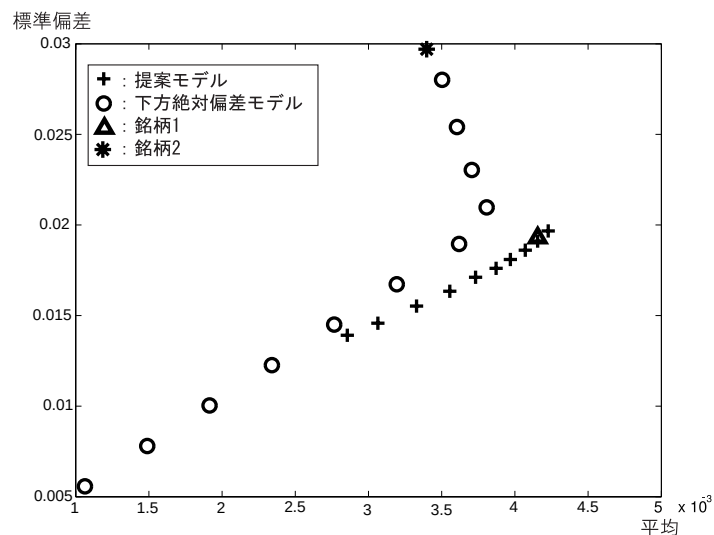


図 5 データ 1 における収益率の平均と標準偏差

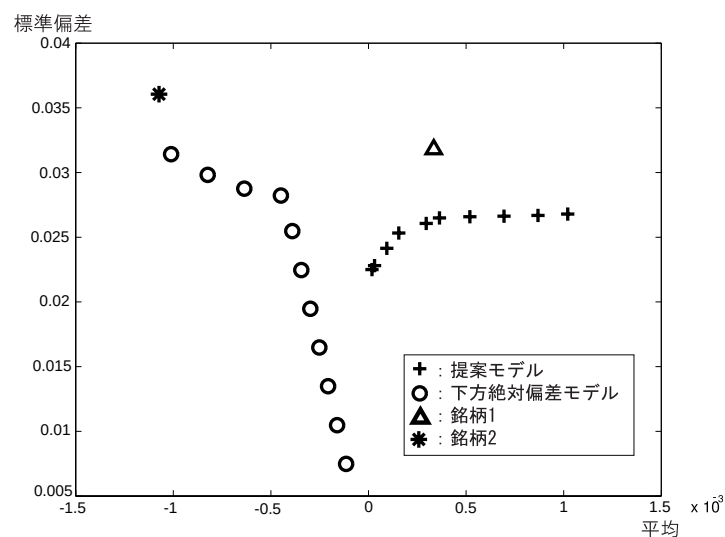


図 6 データ 2 における収益率の平均と標準偏差

と比べ、標準偏差が同程度で大きい収益をあげていることが分かる。特に、図 6 では、銘柄 2 の収益率の平均がマイナスであり、下方絶対偏差モデルの運用成績もマイナスとなっているが、提案モデルによるものはプラ

スとなっている。

6 まとめと今後の課題

本論文では、現在の経済状況に応じて構成を変えることができる資産配分関数を考え、最適な資産配分関数を求める問題を凸2次計画問題に定式化した。さらに、その双対問題を考えることによって、最適な資産配分関数がカーネル関数の和の形で表せることを示した。数値実験では、下方絶対偏差モデルとの比較を行い、提案モデルが優れているということが分かった。

今後の課題として、以下のことが挙げられる。まず、資産運用に関して適切な経済指標を見つける必要がある。本論文の数値実験ではドル価格の変動率を用いたが、資産価格の変動をよりの確に表すことのできる経済指標を用いれば、さらにより資産運用ができるはずである。また、本論文では双対問題を解く手法は考察にしていなかった。投資する資産の数やトレーニングデータの数が増えれば、双対問題は非常に大規模なものになる。そのため、効率のよい双対問題の解法を構築することは大きな課題となる。最後に、状況に応じて資産配分を変える場合、取引コストを無視することはできない。そのため、コストを考慮した最適な資産配分関数を考えることも今後の課題の一つである。

参考文献

- [1] 赤穂 昭太郎, カーネル多変量解析, 岩波書店, 2008.
- [2] C.M. ビショップ (元田 浩, 栗田 多喜夫, 樋口 知之, 松本 裕治, 村田 昇 訳), パターン認識と機械学習 上 ベイズ理論による統計的予測, シュプリンガー・ジャパン, 2007.
- [3] N. Cristianini and J. S. Taylor (大北 剛 訳), サポートベクターマシン入門, 共立出版, 2005.
- [4] 福島 雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.
- [5] J. Gotoh and A. Takeda, Portfolio Learning via VaR/CVaR Minimization, Department of Industrial and Systems Engineering, Discussion Paper Series No.08-04, Chuo University, 2008.
- [6] ILOG CPLEX, <http://www.ilog.co.jp/product/opti/cplex/cplex.html>
- [7] 今野 浩, 理財工学 I -平均・分散モデルとその拡張-, 日科技連出版社, 1995.
- [8] 今野 浩, 下方リスクモデルによるポートフォリオ最適化, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 46, pp. 635-639, 2001
- [9] H. Konno and H. Yamazaki, Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market, Management Science, Vol. 37, No. 5, pp. 519-531, 1991.
- [10] H. Markowitz, Portfolio Selection: Diversification of Investments, John Wiley & Sons, New York, 1959.
- [11] T.R. Rockafellar and S. Uryasev, Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions, Journal of Banking and Finance, Vol. 26, pp. 1443-1471, 2002.
- [12] Yahoo!ファイナンス, <http://quote.yahoo.co.jp>