応用数学

1

複素数平面の原点を中心とする半径 R の開円板 B において正則で境界も含めて連続な関数 $f(z)$ を考える. 複素関数 f の実部を u とする. 以下の問に答えよ.

(1) $f(z)$ の実部 $u(re^{i\theta})$ に対する平均値の定理

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta$$

を証明せよ.

(2) 開円板 B 内の点 $z = re^{i\theta} \neq 0$ に対し, $r < \rho < R$ をみたす ρ を選ぶとし, 点 $w = \dfrac{\rho^2}{r^2}z$ を決める. このとき, 積分路 $C : \zeta = \rho\, e^{i\varphi}$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ に沿った次の積分の値を求めよ.

$$I_1 = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad I_2 = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}d\zeta$$

(3) 点 z, w を除いて定義される関数 $g(\zeta) = \dfrac{\zeta(z-w)}{(\zeta - z)(\zeta - w)}$ は ζ を C 上に制限すると

$$g(\zeta) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\varphi - \theta) + r^2}$$

をみたすことを確かめ, $\zeta \in C$ での $g(\zeta)$ の最大・最小値を求めよ.

(4) 積分公式

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2R\,r\cos(\varphi - \theta) + r^2}d\varphi$$

を証明せよ.

(5) $u(re^{i\theta}) \geq 0$ ならば, 不等式

$$\frac{R-r}{R+r}u(0) \leq u(re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(0)$$

が成り立つことを示せ.