基礎数学 II

6

A, B はともに $n \times n$ 実行列であるとする. A, B の列ベクトルをそれぞれ左から順に $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, および $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ とする. $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{b}_j$ との標準内積を $g_{ij} := \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{b}_j$ とおき, g_{ij} を (i, j) 成分とする $n \times n$ 行列を G と書く. ただし, ^{T} は転置作用素である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) A, B がともに直交行列であるとき, G もまた直交行列となることを証明せよ.

(ii) A, B は直交行列とは仮定しないで, $A = B$ のとき, $\det G \geq 0$ を示せ. ただし, det は行列式を表す記号である.

(iii) A, B は正則行列で, $n = 3$ かつ $A = B$ のとき, $\sqrt{\det G}$ は, $\mathbf{R}^3$ においてベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を稜とする平行 6 面体の体積を表すことを示せ.

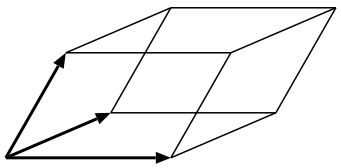

Figure 1: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を稜とする平行 6 面体

(iv) $1 \leq r \leq n$ なる整数 r に対し, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立であるための必要十分条件は

$$\det G_r > 0$$

であることを示せ. ただし, G_r は $g'_{ij} := \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$ を (i, j) 成分とする $r \times r$ 行列である.