応用数学

1

複素平面 $\mathbb{C}$ において，実軸上の閉区間 $[-1,1]$ を含む単連結領域 D を考える．D 内の反時計回りに向き付けられた単純閉曲線 C で，C を境界とする有界領域に $[-1,1]$ が含まれるものを考える（図を参照せよ）．$f(z)$ を D 上で正則な関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(i) n 個の任意の実数 $A_k (k=1,\cdots,n)$ と，$-1<a_1<a_2<\cdots<a_n<1$ を満たすような任意の実数 a_k $(k=1,\cdots,n)$ に対して，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-a_k}\right) f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k)$$

を示せ．

(ii) $z \notin [-1,1]$ なる任意の複素数 z に対して，

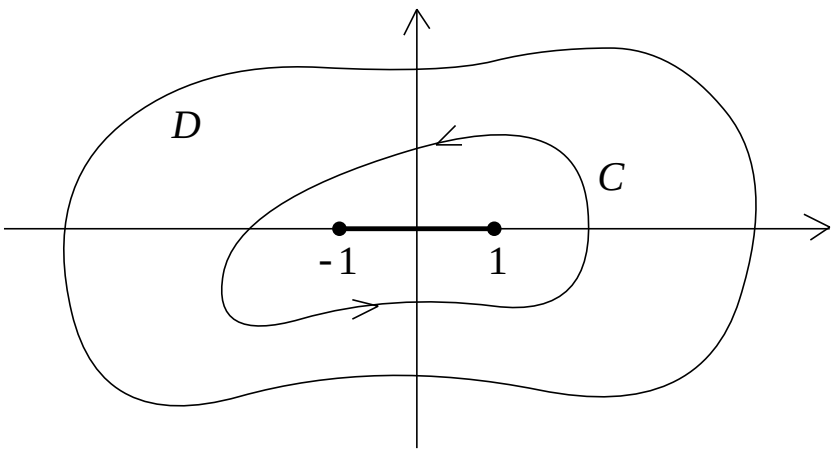
$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{z-x}dx = \mathrm{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

を示せ．ただし，$\mathrm{Log}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ は，$z=x>1$ のときに実数値となるように対数関数の分枝を選んだものである．

(iii) 以下の等式を示せ．

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) f(z)dz = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

注： 領域とは連結開集合のことをいう．



図