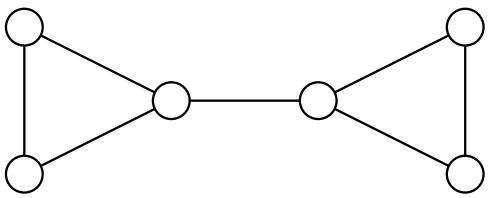
グラフ理論

2 無向グラフ $G = (V, E)$ を考える. 1 つの枝を取り除くと連結成分が増えるとき, その枝を橋 (bridge) という. また, 枝の部分集合 $M \subseteq E$ のどの 2 本の枝も同じ節点に接続しないとき, M をマッチング (matching) という. 節点集合 V の全ての節点がそれに接続する M の枝を持つとき, M を完全マッチングという. 以下の問いに答えよ.

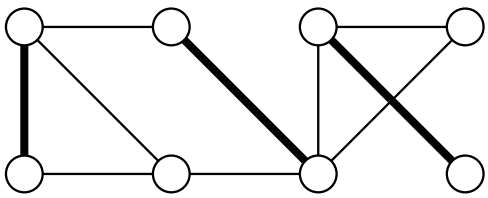
(i) グラフ $G = (V, E)$ が完全マッチングを持つための必要条件は, 節点数 $|V|$ が偶数であることを説明せよ.

(ii) グラフ $G = (V, E)$ が完全マッチングをただ一つ持つならば G は橋を持つ, という性質が知られている. この性質と (i) の性質を利用して, 完全マッチングをただ一つ持つことが分かっているグラフが与えられたときに, そのような完全マッチングを実際に求めるアルゴリズムを構成せよ.

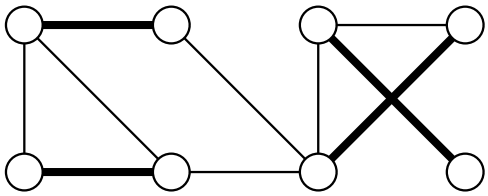
参考のため, 橋, およびマッチングの例を以下に示しておく.



橋の例 (中央の枝)



完全マッチングではないマッチングの例 (太線の枝の集合)



完全マッチングの例 (太線の枝の集合)